

FONDEMENTS ÉPISTÉMIQUES DE CONCEPTS D'ÉQUILIBRE EN THÉORIE DES JEUX

Mots-clés : Conditions épistémiques, connaissance commune.

Key words : Epistemic Justifications, Common Knowledge.

I. — INTRODUCTION

La théorie des jeux, ou tout au moins l'usage qu'il en est fait en économie, centre l'analyse autour de l'étude des équilibres. Un concept d'équilibre donne pour chaque jeu une prédiction sur l'issue de ce jeu, l'état d'équilibre étant soumis à la condition que si les joueurs s'y trouvent, ils n'ont aucun intérêt à en dévier unilatéralement. Cependant, un concept d'équilibre n'explicite pas la manière dont les joueurs vont se coordonner sur un état d'équilibre. La question de la coordination est centrale à cause de la nature auto-référentielle des problèmes d'optimisation des joueurs. Ce qui est bien pour le joueur *A* dépend de ce que fait le joueur *B*, qui dépend également de ce que fait le joueur *A*, etc. Ainsi, les joueurs n'adopteront la stratégie d'équilibre prescrite par le concept que s'ils ont de bonnes raisons de penser que les autres joueurs l'adopteront aussi. La condition de stabilité de l'équilibre n'est pas suffisante pour assurer que les joueurs vont se coordonner dessus.

Deux approches ont tenté de rendre compte de processus concrets par lesquels les joueurs sont susceptibles de se coordonner sur un état d'équilibre. La première approche, appelée *évolutionnaire* (Binmore [1987]), considère que les joueurs adaptent leur comportement au fur et à mesure de leur expérience du jeu. Elle fait apparaître les équilibres comme des états asymptotiques de processus

dynamiques entre joueurs dotés d'une rationalité limitée (1). Une approche alternative considère le problème de coordination comme un problème statique et cherche à donner des *fondements épistémiques* aux équilibres, c'est-à-dire à expliciter les conditions sur l'information et la rationalité des joueurs pour que ces derniers se coordonnent de façon statique sur l'équilibre considéré. Le fait que les actions des joueurs à l'équilibre sont des meilleures réponses mutuelles induit le fait que les joueurs sont rationnels et semble induire une connaissance d'ordre élevé de cette rationalité. Aumann et Brandenburger [1995, p. 1162] notent ainsi que la connaissance commune (2) de la rationalité est souvent décrite de manière informelle comme une *implication* de l'équilibre de Nash.

Il n'est pas évident de savoir comment modéliser la connaissance commune que les joueurs d'un jeu sont rationnels. La rationalité est une propriété qui concerne les choix : un joueur est rationnel s'il choisit une meilleure réponse face à ses croyances. Ainsi il est facile d'identifier les choix rationnels d'un seul joueur dans un modèle d'espace des états. On construit l'espace des états pertinents, on utilise la croyance *a priori* du joueur et sa partition d'information pour calculer ses croyances *a posteriori*, et on identifie ses choix rationnels. Supposons maintenant qu'on doive identifier les choix rationnels de deux joueurs. Un des faits pertinents pour le choix du joueur *A*, et par conséquent pour sa rationalité, est le choix du joueur *B*. Dans ce cas, comment peut-on construire un espace d'états dans lequel chaque état du monde décrit tous les faits incertains pertinents, puis utiliser ces états pour identifier les choix rationnels, quand une des dimensions de l'incertain concerne la rationalité des choix en question ? La réponse a été donnée par Aumann [1987] : les actions des joueurs doivent faire partie de la description donnée par les états du monde. Un état du monde procure une description complète du monde, y compris les réalisations de tous les incertains possibles. Une partie de la description contient les choix que font les joueurs, et un état doit donc inclure une description de ces choix. Une fois qu'on a formulé un tel modèle, il n'est pas difficile de vérifier si le joueur *A* par exemple est rationnel en un état ω . L'état spécifie son action ainsi que ses croyances sur l'action du joueur *B*, qui proviennent des actions spécifiées pour le joueur *B* dans chaque état jugé possible par *A* sous l'état ω . On peut alors vérifier si l'action de *A* en ω est une meilleure réponse face à ses croyances en ω . Comme on peut appliquer ce test de la rationalité du joueur *A* en chaque état, on peut parler de ce que cela signifie pour *A* d'être rationnel, pour *B* de savoir que *A* est rationnel, pour *A* de savoir que *B* sait que *A* est rationnel, etc. Le fait d'incorporer les actions des joueurs dans la description des états du monde permet certes d'avoir un modèle maniable du point de vue analytique, mais plus difficile à interpréter. Il peut sembler qu'on perd alors la notion usuelle du modèle d'es-

- (1) Pour une revue de la littérature sur l'approche évolutionnaire, voir l'article de Baron et Solal, ainsi que celui de Béal et Durieu dans ce numéro.
- (2) Voir Ménager en début de volume pour la formalisation du modèle d'espace-états et de la notion de connaissance commune.

pace des états, où l'information qu'il contient sur les croyances d'un joueur permet de déduire ses choix rationnels. Dans un problème de décision n'impliquant qu'un joueur, il est tentant de voir les états du monde comme décrivant tous les aspects incertains pertinents pour le problème de décision *excepté* les actions qui vont être prises par le joueur, et de voir celles-ci comme la conséquence du modèle. La nature de l'incertain contenu dans les états du monde et la nature de l'action prise semblent alors être qualitativement différentes, le premier semblant être l'*input* et le deuxième l'*output* du modèle. Dès lors qu'on se place dans un problème de décision interactive, cette distinction qualitative disparaît puisque les actions de l'un font partie de l'incertain de l'autre. Il est alors difficile de voir l'incertain comme un *input* et les actions comme un *output* du modèle. Samuelson [2004] souligne cependant le fait que cette incapacité à distinguer *input* et *output* dans le modèle est présente dans tous les modèles d'équilibre général. De plus, le fait que les actions appartiennent ou non à la description donnée par les états du monde n'a d'importance que du point de vue du modélisateur. Pour les joueurs, rien n'a changé. Chacun continue à choisir une action optimale par rapport à ses croyances sur un monde incertain.

Cet article se propose de passer en revue les fondements épistémiques de trois notions usuelles d'équilibres statiques : l'équilibre de Nash, l'équilibre rationalisable et l'équilibre corrélé. La première section montre que la rationalité et sa connaissance commune ne sont des conditions ni nécessaires ni suffisantes pour que les joueurs se coordonnent sur l'équilibre de Nash, et présente une justification épistémique n'impliquant aucune notion de connaissance commune. Dans la deuxième section, on montre que la rationalité et sa connaissance commune justifient un concept d'équilibre alternatif, l'équilibre rationalisable. Enfin, on présente la justification épistémique de l'équilibre corrélé et on discute des liens avec l'équilibre de Nash. En particulier, on compare les niveaux d'exigence des conditions épistémiques induisant la coordination des agents sur les différents concepts d'équilibre.

II. — LES FONDEMENTS ÉPISTÉMIQUES DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

Un équilibre de Nash est un profil d'actions où les joueurs choisissent des meilleures réponses face aux actions de ce profil. Dans cette section, on montre d'abord que la connaissance commune de la rationalité des joueurs n'est une condition ni nécessaire, ni suffisante à l'équilibre de Nash. On présente ensuite la justification épistémique de l'équilibre de Nash proposée par Aumann et Brandenburger [1995], qui n'implique aucune hypothèse de connaissance commune.

2.1. Définition d'un équilibre de Nash

Considérons un jeu $G = [I, \{A_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I}]$ où I est l'ensemble fini des joueurs, A_i est l'ensemble d'actions du joueur i et $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de paie-

ment du joueur i avec $A \equiv \prod_{i \in I} A_i$ l'ensemble des profils d'actions du jeu. On considère l'ensemble des jeux finis (*i.e.* où les ensembles d'actions de chaque joueur sont composés d'un nombre fini d'éléments). On note $A_{-i} \equiv \prod_{j \neq i} A_j$ l'ensemble des profils d'actions des opposants du joueur i et a_{-i} un élément de A_{-i} . On note $\Sigma_i \equiv \Delta(A_i)$ l'ensemble des distributions de probabilités sur A_i . Typiquement, un élément de Σ_i sera interprété comme une stratégie mixte, c'est-à-dire une randomisation de l'agent i sur son ensemble d'actions. Enfin, on note $\Sigma \equiv \prod_{i \in I} \Sigma_i$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes du jeu, $\Sigma_{-i} \equiv \prod_{j \neq i} \Sigma_j$ l'ensemble des profils de stratégies mixtes des opposants du joueur i et σ_{-i} un élément de Σ_{-i} . $\sigma_i(a_i)$ désigne le poids attribué à l'action a_i par la stratégie mixte σ_i . On note $\sigma_{-i}(a_{-i}) \equiv \prod_{j \neq i} \sigma_j(a_j)$ et $\sigma(a) \equiv \prod_{i \in I} \sigma_i(a_i)$. Le support de $\sigma_i \in \Sigma_i$ est noté $Supp(\sigma_i) \equiv \{a_i \in A_i \mid \sigma_i(a_i) > 0\}$ et pour tout $S_i \subset A_i$, on note $\Delta(S_i) \equiv \{\sigma_i \in \Sigma_i \mid \sigma_i(a_i) > 0 \Rightarrow a_i \in S_i\}$. Par un abus de notations, un élément $a_i \in A_i$ sera parfois assimilé à la distribution de probabilités mettant un poids 1 sur a_i et donc comme un élément de Σ_i (le même type d'abus sera utilisé pour $a_{-i}^* \in A_{-i}$).

La correspondance de meilleure réponse en stratégies pures d'un joueur i est notée $BR_i : \Sigma_{-i} \rightarrow A_i$ et est définie par :

$$BR_i(\sigma_{-i}) = \arg \max_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \sigma_{-i}(a_{-i}) g_i(a_i, a_{-i})$$

Ainsi, pour $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$, $BR_i(\sigma_{-i})$ représente l'ensemble des actions du joueur i lui fournissant un paiement espéré maximal lorsque les opposants jouent le profil de stratégies σ_{-i} . Nous donnons maintenant les définitions des équilibres de Nash purs et mixtes.

Définition 2.1. – *Un profil d'actions $a^* \in A$ est un équilibre de Nash pur du jeu G si pour tout joueur i , $a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*)$.*

— *Un profil de stratégies mixtes $\sigma^* \in \Sigma$ est un équilibre de Nash mixte du jeu G si pour tout joueur i , $Supp(\sigma_i^*) \subset BR_i(\sigma_{-i}^*)$.*

L'existence d'un équilibre de Nash en stratégies pures est satisfaite dans les jeux à ensemble d'actions compacts et convexe lorsque les fonctions de paiements sont quasi-concaves et continues (voir par exemple Fudenberg et Tirole [1988, p. 34]), dans les jeux super modulaires (Milgrom et Roberts [1990]) et dans les jeux potentiels (Monderer et Shapley [1996], Berninghaus, Haller et Outkin dans ce numéro). Par contre, l'existence n'est pas assurée dans certains jeux finis. Néanmoins, lorsqu'on fait l'hypothèse que les agents choisissent de randomiser sur leurs ensembles d'actions, un équilibre de Nash en stratégies mixtes existe toujours dans les jeux finis (Nash [1951] (3)).

(3) Voir Glicksberg [1952] et Reny [1999] pour des extensions à des cadres topologiques plus faibles.

2.2. La connaissance commune de la rationalité est-elle nécessaire à l'équilibre de Nash ?

On montre maintenant que la connaissance commune de la rationalité n'est pas une condition nécessaire à l'équilibre de Nash. L'exemple suivant décrit un jeu où les joueurs peuvent jouer l'équilibre de Nash sans qu'il soit connaissance commune qu'ils jouent l'équilibre de Nash, et sans que la rationalité des deux joueurs ne soit connaissance commune. Il existe même un état du monde où les joueurs jouent l'équilibre de Nash alors que la rationalité des joueurs n'est même pas *connaissance mutuelle* en cet état.

Exemple 1. On considère deux joueurs A et B . L'ensemble de stratégies du joueur A est $\{C, D\}$ et celui du joueur B est $\{c, d\}$. La matrice des paiements du jeu est la suivante :

	c	d
C	2 2	0 0
D	0 0	1 1

Les deux équilibres de Nash purs de ce jeu sont (C, c) et (D, d) . Le joueur A peut être de type C_1 , D_1 ou D_2 , et le joueur B de type c_1 , d_1 ou d_2 . Le type C_1 joue l'action C , tandis que les types D_1 et D_2 jouent l'action D . De même, le type c_1 joue l'action c tandis que les types d_1 et d_2 jouent l'action d . L'ensemble des états du monde est l'ensemble des paires de types. Le tableau suivant décrit les croyances de chaque type sur les types de l'autre joueur.

	c_1	d_1	d_2
C_1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0 0
D_1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0 0	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
D_2	0 0	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Par exemple, en l'état (C_1, c_1) , le joueur B est de type c_1 donc il croit que le joueur A est de type C_1 avec une probabilité $1/2$ et de type D_1 avec une probabilité $1/2$. Cela signifie que lorsque B joue l'action c , il croit qu'il y a autant de chances que A joue C ou D . Considérons l'état (D_2, d_2) . Le joueur B croit que le joueur A est de type D_1 avec une probabilité $1/2$ et D_2 avec une probabilité $1/2$. Donc B sait que A va jouer l'action D , face à laquelle l'action d est une meilleure réponse. De même, en (D_2, d_2) le joueur A sait que B va jouer l'action d , face à quoi l'action D est une meilleure réponse. Ainsi, les deux

joueurs sont rationnels en (D_2, d_2) et jouent l'équilibre de Nash (D, d) . En (D_2, d_2) , les actions D et d sont *connaissance mutuelle*, c'est-à-dire que les deux joueurs savent que l'équilibre (D, d) va être joué. Cependant, les actions D et d ne sont pas *connaissance commune*. Bien que le joueur B sache que le joueur A va jouer D , A ne sait pas que B sait qu'il va jouer D . En effet, en (D_2, d_2) , le joueur A attribue une probabilité $1/2$ au type d_1 , qui lui-même attribue une probabilité $1/2$ au type C_1 , donc au fait que le joueur A joue C . De plus, bien que les deux joueurs soient rationnels en (D_2, d_2) , leur rationalité n'est pas connaissance commune en (D_2, d_2) . Elle n'est même pas connaissance mutuelle. On a vu que le joueur A pense que B est de type d_1 avec une probabilité $1/2$. Or le type d_1 joue l'action d , dont le gain espéré est $1/2$, plutôt que c dont le gain espéré est 1 . Par conséquent, en (D_2, d_2) le joueur A *ne sait pas* que le joueur B est rationnel. Dans cet exemple, les deux joueurs jouent l'équilibre de Nash (D, d) sous l'état (D_2, d_2) , alors que la rationalité des joueurs n'est même pas connaissance mutuelle. Ainsi, contrairement à l'intuition première, la connaissance commune de la rationalité n'est pas nécessaire à la coordination sur l'équilibre de Nash.

2.3. La connaissance commune de la rationalité est-elle suffisante ?

La connaissance commune de la rationalité est-elle une condition *suffisante* pour que les joueurs d'un jeu jouent un équilibre de Nash de ce jeu ? Si la réponse est oui, on peut alors renforcer l'hypothèse usuelle de rationalité des joueurs par celle de connaissance commune de la rationalité des joueurs pour justifier l'étude des modèles à l'équilibre de Nash. Pour répondre à cette question, considérons l'exemple suivant, dû à Samuelson [2004].

Exemple 2. Considérons deux joueurs A et B . L'ensemble de stratégies du joueur A est $\{X, Y, Z\}$ et celui du joueur B est $\{x, y, z\}$. La matrice des paiements du jeu est la suivante :

		Joueur B		
		x	y	z
Joueur A	X	2	1	0
	Y	3	2	1
Z	Y	1	5	2
	Z	0	0	4
		2	1	0

Les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu sont (X, x) et (Y, y) . Pour modéliser les croyances et la connaissance des joueurs dans ce jeu, on commence par construire l'espace des états, où un état décrit les actions jouées par A et B . On doit faire en sorte que les stratégies des deux joueurs soient mesu-

rables par rapport à leur partition d'information : si un joueur ne peut pas distinguer deux états différents, alors il doit jouer la même stratégie dans ces deux états. Supposons que le joueur A joue X et le joueur B joue y , et que A et B sont rationnels. Est-il possible que la rationalité des deux joueurs soit connaissance commune alors même que (X,y) n'est pas un équilibre de Nash ?

Supposons qu'il y a cinq états du monde décrivant entre autres choses les profils d'actions joués par A et B . Les profils joués dans chaque état sont les suivants :

$$\omega_1 : (X,x), \omega_2 : (X,y), \omega_3 : (Y,y), \omega_4 : (X,y), \omega_5 : (X,x) \quad (1)$$

Supposons enfin que les joueurs A et B ont tous les deux une croyance *a priori* uniforme sur l'espace des états, et que leurs partitions sur Ω sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_A &= \{\omega_1, \omega_2\} \{\omega_3\} \{\omega_4, \omega_5\} \\ \Pi_B &= \{\omega_1\} \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \{\omega_5\} \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que les deux agents sont rationnels en chacun des états. Sous l'état ω_1 , le joueur A ne peut pas distinguer entre les états ω_1 et ω_2 . Le joueur A sait que sous l'état ω_1 , le joueur B sait que l'état est ω_1 et qu'il joue x . A sait que si l'état est ω_2 , le joueur B sait que l'état est ω_2, ω_3 ou ω_4 , et qu'il joue y . Les croyances du joueur A en ω_1 et en ω_2 sont donc que le joueur B joue x avec une probabilité $1/2$ et y avec une probabilité $1/2$. Son espérance de gain s'il joue X est alors de $5/2$, tandis qu'elle est de 2 s'il joue Y est de $3/2$ s'il joue Z . La stratégie X est donc bien une meilleure réponse face à ses croyances en ω_1 et ω_2 . En ω_3 , le joueur A sait que l'état du monde est ω_3 , et que le joueur B joue la stratégie y . La meilleure réponse du joueur A face à y est Y , donc le joueur A est rationnel en ω_3 . Enfin, en ω_4 et ω_5 , le joueur A croit que le joueur B joue la stratégie x avec une probabilité $1/2$ et la stratégie y avec une probabilité $1/2$. On a vu que la stratégie X est une meilleure réponse face à ces croyances. Ainsi, le joueur A est rationnel en tout état du monde, ce qui implique qu'il est connaissance commune que le joueur A est rationnel. On montre de la même manière qu'il est connaissance commune que le joueur B est rationnel.

Ainsi, dans cet exemple, il est connaissance commune que les deux joueurs sont rationnels en chaque état, alors que les profils d'actions jouées en ω_2 et ω_4 ne sont pas des équilibres de Nash. Par conséquent, on a montré que la connaissance commune de la rationalité n'implique pas l'équilibre de Nash. La justification de l'équilibre de Nash doit impliquer plus que la rationalité et la connaissance des paiements des joueurs.

2.4. Une justification épistémique à l'équilibres de Nash

On a vu que la connaissance commune de la rationalité n'est une condition ni nécessaire, ni suffisante au fait que les joueurs se coordonnent sur l'équi-

libre de Nash. Une justification épistémique de l'équilibre de Nash doit mobiliser d'autres hypothèses. Nous allons voir que si les joueurs connaissent les actions jouées par les autres, par exemple si les joueurs communiquent entre eux avant de jouer ou si un régulateur apprend à chaque joueur les actions jouées par les autres, et si les joueurs connaissent leur propre fonction de paiement, alors l'hypothèse de rationalité est suffisante pour que les joueurs se coordonnent sur l'équilibre de Nash.

Proposition 2.2. (Aumann et Brandenburger [1995]) *Soit a^* un profil d'actions. Si en un état :*

(H1) *chaque joueur connaît les stratégies des autres joueurs,*

(H2) *chaque joueur est rationnel, c'est-à-dire maximise son espérance de gain étant données ses croyances sur le choix de stratégies des autres,*

(H3) *chaque joueur connaît sa propre fonction de paiement, alors a^* est un équilibre de Nash en cet état.*

Preuve. Fixons un joueur i . En notant \tilde{a}_{-i} , la croyance subjective du joueur i , **H2** et **H3** entraînent $a_i^* \in BR_i(\tilde{a}_{-i})$. **H1** entraîne $a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*)$ et montre donc que a^* est un équilibre de Nash.

En effet, étant donné que tous les joueurs connaissent les stratégies des autres joueurs et sont rationnels, ils jouent leur meilleure réponse face aux stratégies des autres et l'équilibre joué est de fait un équilibre de Nash. Notons que cette proposition fait appel à la connaissance *mutuelle* des stratégies, mais pas à une connaissance d'ordre supérieur. En ce qui concerne la rationalité des joueurs et leurs fonctions de paiement, la connaissance mutuelle n'est même pas requise. Seul compte le fait que les joueurs sont rationnels et que chacun connaît sa propre fonction de paiement. Cette proposition s'applique aux stratégies pures (actions) et aux stratégies mixtes au sens traditionnel de *randomisation* entre les actions. Dans ce cas, les mixtures doivent être connaissance mutuelle et non leurs réalisations pures.

Ces dernières années, une vue différente du mixage a émergé (4). Dans cette optique, les joueurs ne *randomisent* pas. On considère que chaque joueur choisit une action particulière, et que les autres joueurs forment des conjectures à propos de l'action qui va être jouée. La mixture représente alors l'incertain dans lequel sont les joueurs vis-à-vis des actions jouées par les autres, et pas vis-à-vis de leurs propres actions. Formellement, une conjecture Φ_i d'un joueur i est un élément de $\Delta(A_{-i})$. Dans ce contexte, Aumann et Brandenburger [1995] donnent des conditions suffisantes pour qu'un profil de conjectures soit

(4) Harsanyi [1973], Aumann [1987], Tan et Werlang [1988], Brandenburger et Dekel [1987].

un équilibre de Nash, différentes selon que le jeu implique plus de deux joueurs ou non.

Théorème 2.3. (Aumann et Brandenburger [1995]) *Soit un jeu à deux joueurs avec g la matrice des paiements, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ une paire de conjectures. Si en un état on a*

- *connaissance mutuelle des paiements g*
 - *connaissance mutuelle que les joueurs sont rationnels*
 - *connaissance mutuelle des conjectures Φ*
- alors Φ constitue un équilibre de Nash en cet état.*

Dans ce théorème comme dans la proposition 2.2, la connaissance commune ne joue aucun rôle. Il montre que dans les jeux à deux joueurs, des conditions épistémiques n'impliquant aucune connaissance commune sont suffisantes pour l'équilibre de Nash. Quand le nombre de joueurs est plus grand que 2, une conjecture Φ_i d'un joueur i n'est plus une stratégie mixte d'un autre joueur, mais une distribution de probabilité sur le vecteur des actions de tous les autres joueurs. Cependant, la conjecture Φ_i induit une stratégie mixte pour chaque joueur $j \neq i$, que nous appellerons « la conjecture de i à propos j ». Différents joueurs autres que j peuvent avoir différentes conjectures à propos de j . Par conséquent, le théorème dans le cas de $n > 2$ joueurs requiert une condition supplémentaire de croyance commune, et une condition plus forte que la connaissance mutuelle des conjectures : la connaissance commune.

Théorème 2.4. (Aumann et Brandenburger [1995]) *Soit un jeu à $n \geq 3$ joueurs avec g la matrice des paiements, Φ un profil de conjectures. Si en un état les joueurs ont une croyance commune qui assigne un poids positif au fait que:*

- *les paiements sont connaissance mutuelle,*
- *la rationalité des joueurs est connaissance mutuelle,*
- *les conjectures Φ sont connaissance commune,*

alors pour chaque joueur j , tous les joueurs i ont la même conjecture à propos de j , et le profil de stratégies mixtes qui en découle est un équilibre de Nash.

Ces conditions sont relativement faibles au sens où si l'on supprime une seule hypothèse, on peut toujours trouver un exemple de jeu où les agents se coordonnent sur un autre équilibre que l'équilibre de Nash.

Cependant, les conditions épistémiques de Aumann et Brandenburger [1995] ne peuvent pas être véritablement considérées comme un fondement à l'équilibre de Nash puisque certaines d'entre elles reposent sur les croyances des joueurs sur ce que les autres vont choisir de faire. Des fondements plus satis-

faisants devraient porter essentiellement sur les *capacités* cognitives et la manière de raisonner des agents. Ainsi, ces conditions devraient plutôt être considérées comme une définition alternative de l'équilibre de Nash. Néanmoins, on voit bien que pour que les joueurs se coordonnent de façon *statique* sur l'équilibre de Nash, il faut qu'ils aient simulé mentalement le raisonnement des autres. Une telle approche épistémique où on formalise explicitement la façon dont les joueurs simulent le raisonnement des autres joueurs pour prévoir ce qu'ils vont faire est souvent appelée approche *divinatoire* (5). Alors que l'équilibre de Nash ne semble pas posséder de fondement divinatoire, d'autres concepts d'équilibres semblent mieux fondés.

III. — LES FONDEMENTS ÉPISTÉMIQUES DE L'ÉQUILIBRE RATIONALISABLE

On a vu que la connaissance commune de la rationalité n'était pas une condition suffisante à l'équilibre de Nash. Cependant, la connaissance commune de la rationalité justifie un ensemble de profils d'actions plus large que l'ensemble des équilibres de Nash : l'ensemble des équilibres *rationalisables*. Dans cette section, on définit l'ensemble des équilibres rationalisables comme une extension ensembliste de l'équilibre de Nash pur. On montre que ce concept d'équilibre est justifié d'un point de vue épistémique par la rationalité et sa connaissance commune.

3.1. Définition d'un équilibre rationalisable

Reprenons l'exemple 2. On remarque que parmi l'ensemble des états où la rationalité des deux joueurs est connaissance commune, il n'y a aucun état dans lequel le joueur *A* joue *Z*, qui est une stratégie strictement dominée par *X*. Ce n'est pas une coïncidence : il n'y a aucune conjecture de *A* à propos de *B* qui ferait de *Z* une meilleure réponse face à cette conjecture. Par conséquent *A* ne peut pas jouer *Z* s'il est rationnel. Si le joueur *B* sait que *A* est rationnel, il sait alors également que *A* ne va pas jouer *Z*. Sachant cela, sa stratégie *z* est strictement dominée par *y*. Ainsi, si *B* est rationnel et sait que *A* est rationnel, il ne va jamais jouer *z*. D'une manière générale, que souhaite faire un joueur rationnel ? Il envisagera de jouer une action si et seulement si elle est une meilleure réponse face à sa croyance sur les actions jouées par les autres. Ainsi, si les agents sont rationnels, ils considèrent que les autres joueurs peuvent jouer n'importe quelle action et ils éliminent de leur ensemble d'actions

(5) Si l'on interprète l'équilibre de Nash comme un état de long terme, (*i.e.* vers lequel les agents devraient tendre à force d'ajustement) alors il n'est pas nécessaire de supposer que les agents procèdent de façon divinatoire (voir par exemple Baron, Solal dans le même volume).

toutes les actions qui ne sont meilleures réponses à aucune de leurs conjectures sur les actions des autres joueurs. Si la rationalité est connaissance mutuelle parmi les joueurs, les agents simulent le raisonnement de leur opposant et se disent : mon opposant est rationnel donc lui non plus ne jouera pas une action qui n'est pas meilleure réponse. Chaque joueur affine ainsi l'ensemble de ses croyances en excluant la possibilité que son opposant joue autre chose qu'une meilleure réponse. Chaque agent élimine alors de son ensemble d'actions les actions qui ne sont pas meilleure réponse par rapport à ses nouvelles croyances. Si la rationalité est connaissance mutuelle à l'ordre deux, chaque joueur sait que chaque joueur sait que tous les joueurs sont rationnels et chacun révisé encore ses croyances. Si la rationalité est connaissance commune, alors ce raisonnement peut être itéré à l'infini. L'ensemble des profils d'actions survivant à ce processus est alors appelé l'ensemble des *équilibres rationalisables*.

Définissons formellement ce processus itératif et l'ensemble des équilibres rationalisables qu'il induit. Pour tout joueur i , on définit le processus $\{H_i^t\}_{t \geq 0}$ tel que

- $H_i^0 = A_i$ et pour tout $t \geq 0$,
- $H_i^{t+1} = \{a_i \in H_i^t \mid \exists \sigma_{-i} \in \Pi_{-i} \Delta(H_i^t) \text{ tel que } a_i \in BR_i(\sigma_{-i})\}$

On note $R_i \equiv \bigcap_{t=0}^{\infty} H_i^t$ et $R \equiv \prod_{i \in I} R_i$.

Définition 3.1. R est l'ensemble des équilibres rationalisables.

Dans un jeu fini, ce processus converge en un nombre fini d'étapes. Dans l'exemple 2, le processus converge vers $\{X, Y\} \times \{x, y\}$. Le processus H_i^t ressemble de très près au processus d'élimination des actions strictement dominées. En fait, dans les jeux à deux joueurs, l'ensemble des stratégies survivant à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est égal à l'ensemble des stratégies *rationalisables* (Bernheim [1984], Pearce [1984]). À plus de deux joueurs, l'ensemble des actions rationalisables du jeu G constitue un sous-ensemble parfois propre de l'ensemble des stratégies survivant à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées. Cependant, si l'on autorise les joueurs à croire que leurs opposants choisissent des stratégies de façon non indépendante, formellement, si le processus H_i^t est modifié par $\tilde{H}_i^{t+1} = \{a_i \in \tilde{H}_i^t \mid \exists \sigma_{-i} \in \Delta(\prod_{j \neq i} \tilde{H}_j^t) \text{ tel que } a_i \in BR_i(\sigma_{-i})\}$, alors les deux notions sont équivalentes quel que soit le nombre de joueurs.

3.2. Justification épistémique des équilibres rationalisable

Le résultat suivant a été établi par Bernheim [1984], Pearce [1984] et Tan et Werlang [1988] et montre que le processus que nous avons défini dans la section précédente doit être considéré comme l'implication de la rationalité et de sa connaissance commune.

Proposition 3.2. Soit a^* un profil d'actions. Si en un état :

(A1) chaque joueur révise ses croyances de manière bayésienne,

(A2) chaque joueur est rationnel, c'est-à-dire maximise son espérance de gain sachant ses croyances subjectives sur le choix de stratégies des autres,

(A3) les paiements des joueurs et le fait que chaque joueur satisfait A1 et A2 sont connaissance commune, alors a^* est un équilibre rationalisable en cet état.

IV. — LES FONDEMENTS ÉPISTÉMIQUES DE L'ÉQUILIBRE CORRÉLÉ

Retournons à l'exemple 2, avec l'espace des états donné par (1). Que peut dire un observateur extérieur de l'interaction entre les deux joueurs? On a fait l'hypothèse que les croyances de A et B étaient telles que tous les états sont équiprobables. Par conséquent, la probabilité *ex ante* de chacune des issues du jeu est :

$$\begin{aligned} (X,x) & 0.4 \\ (X,y) & 0.4 \\ (Y,y) & 0.2 \end{aligned} \tag{2}$$

Cette distribution de probabilité sur les stratégies n'est pas l'issue d'un équilibre de Nash, mais c'est l'issue d'un *équilibre corrélé*. Pour que cette issue soit un équilibre de Nash, il faudrait que le joueur A mixe de manière indépendante entre X et Y et que le joueur B mixe de manière indépendante entre x et y. Cela donnerait une probabilité strictement positive à l'issue (Y,x), qui n'est pourtant jamais observée. C'est précisément parce qu'il n'implique pas d'indépendance que l'équilibre corrélé peut être cohérent avec les issues observées en (2).

4.1. Définition de l'équilibre corrélé

La corrélation est une manière de *randomiser* plus générale que le mixage. Dans les deux cas, les joueurs basent leurs choix sur l'observation d'un événement aléatoire. Dans le cas de stratégies mixtes, ces observations sont indépendantes, tandis que dans le cas de stratégies corrélées, elles peuvent ne pas l'être. Considérons la matrice de gains définie dans l'exemple 2, et supposons que les joueurs décident d'adopter le mécanisme de coordination suivant. Un dé à six faces est lancé, et les joueurs observent imparfaitement le résultat du lancé de dé. A n'observe que le caractère *pair* ou *impair*, et B distingue uniquement le lancé "5" des autres résultats. En notant ω_i l'état du monde dans lequel le résultat du lancé est i , les partitions d'information de A et B sur les états du monde sont les suivantes:

$$\Pi_A : \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \Pi_B : \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\} \{\omega_5\}$$

Le mécanisme de coordination prescrit à chaque joueur de jouer de la manière suivante : A joue X s'il observe un tirage impair, et Y sinon. B joue x si le lancé du dé est "5", et y sinon. Ce mécanisme prescrit alors aux joueurs de jouer (X,y) si le lancé est "1" ou "3", (Y,y) si le lancé est pair, et (X,x) si le lancé est "5".

Définition 4.1. (Aumann [1974]) Soit une structure d'information $(\Omega, \{\Pi_i\}_i, \{P_i\}_i)$, où Ω est l'ensemble des états du monde, Π_i la partition d'information du joueur i et P_i la croyance a priori de i sur Ω . Le vecteur de stratégies corrélées $\sigma := (\sigma_i)_i : \Omega \rightarrow \prod_i A_i$ est un équilibre corrélé de G associé à la structure d'information $(\Omega, \{\Pi_i\}_i, \{P_i\}_i)$ si

— $\forall i, \sigma_i : \Omega \rightarrow A_i$ est mesurable par rapport à Π_i , i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ pour tout $\omega' \in \Pi_i(\omega)$, et

— $\forall i, \forall \omega \in \Omega$ tel que $P_i(\omega) > 0$, $\forall \tau_i : \Omega \rightarrow A_i$ mesurable par rapport à Π_i , on a

$$\sum_{\omega' \in \Pi_i(\omega)} P_i(\omega' | \Pi_i(\omega)) g_i(\sigma_i(\omega'), \sigma_{-i}(\omega')) \geq \sum_{\omega' \in \Pi_i(\omega)} P_i(\omega' | \Pi_i(\omega)) g_i(\tau_i(\omega'), \sigma_{-i}(\omega')):$$

Un équilibre corrélé objectif est un équilibre corrélé subjectif où $P_i = P$ pour tout joueur i .

Dans la forme, cette définition ressemble à celle de l'équilibre de Nash : les joueurs ne doivent pas avoir de déviations unilatérales profitables à l'équilibre corrélé. Plus précisément, on peut noter que ce concept d'équilibre est formellement identique à un équilibre de Nash bayésien où l'espace des états Ω , les croyances a priori P_i et les partitions Π_i seraient fixés. Néanmoins, pour l'équilibre corrélé, ces éléments sont partie intégrante de la définition.

4.2. Fondement épistémique de l'équilibre corrélé

Nous présentons le fondement épistémique que Aumann propose à l'équilibre corrélé objectif.

Théorème 4.2. (Aumann [1987]) Supposons que les joueurs jouent σ en un état. Si

— les joueurs ont une croyance a priori commune sur Ω ,

— la rationalité des joueurs est connaissance commune en cet état,

alors σ est un équilibre corrélé objectif.

Quel est le rôle de l'hypothèse de croyance a priori commune ? On peut la voir comme une version plus faible de l'hypothèse de connaissance mutuelle des stratégies. Si les états du monde décrivent aussi les stratégies, alors l'hypothèse de croyance a priori commune implique que les agents ont tous les mêmes croyances sur les actions que les joueurs vont jouer. Dans le cas de

connaissance mutuelle des stratégies, cette croyance *a priori* commune est dégénérée et donne un poids 1 à l'action qui va être jouée effectivement.

Il semble que le concept d'équilibre corrélé (objectif) et celui d'équilibre rationalisable soient proches. En effet, les conditions épistémiques de chacun des deux concepts invoquent les hypothèses de rationalité et de connaissance commune de la rationalité. Néanmoins, une hypothèse cruciale dans la définition de l'équilibre corrélé est l'hypothèse que les agents partagent tous une même probabilité *a priori* sur l'espace des états du monde, c'est ce qui le distingue de l'équilibre rationalisable.

Il serait alors tentant de penser que l'équilibre corrélé subjectif est équivalent à la rationalisabilité. Néanmoins, comme nous allons le voir, ce n'est pas le cas et plus précisément, l'équilibre corrélé donne souvent des prédictions plus larges que l'équilibre rationalisable. La définition de l'équilibre corrélé requiert que les stratégies des joueurs soient optimales *ex ante*, c'est-à-dire avant même que chacun des joueurs ne prenne connaissance de son information privée (la cellule de sa partition). Néanmoins, ces stratégies ne sont pas nécessairement optimales *ex post*, c'est-à-dire après que les joueurs apprennent leur information privée. C'est ce qui implique que l'équilibre corrélé subjectif donne souvent des prédictions plus larges que l'équilibre rationalisable. L'exemple suivant, tiré de Brandenburger et Dekel (1987), illustre le fait qu'un équilibre corrélé subjectif peut ne pas être rationalisable.

Exemple 3. Considérons deux joueurs *A* et *B*. L'ensemble de stratégies du joueur *A* est $\{U, D\}$ et celui du joueur *B* est $\{L, R\}$. L'ensemble des états du monde est $\{\omega_1, \omega_2\}$, et les deux joueurs ont des croyances *a priori* différentes sur $\{\omega_1, \omega_2\}$: $P_A(\omega_1) = 1$, $P_A(\omega_2) = 0$ et $P_B(\omega_1) = P_B(\omega_2) = 1/2$. Les deux joueurs sont informés sur l'ensemble des états du monde par les partitions $\Pi_A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$ et $\Pi_B = \{\omega_1, \omega_2\}$. Enfin, la matrice des paiements est donnée par :

	<i>L</i>	<i>R</i>
<i>U</i>	2 3	2 1
<i>D</i>	4 0	1 0

Considérons le vecteur de stratégies corrélées suivant. Le joueur *A* joue *U* en ω_1 et *D* en ω_2 ; le joueur *B* joue *L* quel que soit l'état du monde. C'est-à-dire $\sigma_A(\omega_1) = U$, $\sigma_A(\omega_2) = D$ et $\sigma_B(\omega_1) = \sigma_B(\omega_2) = L$. σ_A et σ_B sont mesurables par rapport respectivement à Π_A et Π_B , et on a

$$\sum_{\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}} P_A(\omega) g_A(\sigma_A(\omega), \sigma_B(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}} P_A(\omega) g_A(\tau(\omega), \sigma_B(\omega)) \text{ pour tout } \tau \Pi_A\text{-mesurable.}$$

$$\sum_{\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}} P_B(\omega) g_B(\sigma_A(\omega), \sigma_B(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}} P_B(\omega) g_B(\sigma_A(\omega), \tau(\omega)) \text{ pour tout } \tau \Pi_B\text{-mesurable.}$$

Ainsi, (σ_A, σ_B) induit une probabilité strictement positive à l'équilibre (D, L) , alors que D est une action strictement dominée pour le joueur A , et que par conséquent (D, L) n'est pas un équilibre rationalisable.

Dans cet exemple, on a pu exhiber un équilibre corrélé non rationalisable car la définition de l'équilibre corrélé qu'on a utilisée ne requiert l'optimalité que dans les états de probabilité non nulle. Ainsi, σ_A est une stratégie d'équilibre possible pour le joueur A car elle lui prescrit de jouer une action strictement dominée dans un état qu'il croit de probabilité nulle.

Un raffinement possible du concept d'équilibre corrélé consiste alors à imposer aux stratégies choisies par les joueurs d'être optimales même dans les états ayant une probabilité nulle. Cela revient à imposer aux stratégies des joueurs d'être optimales même après que les joueurs apprennent leur information privée. Pour cet raison, ce raffinement de l'équilibre corrélé subjectif s'appelle *l'équilibre corrélé a posteriori*. Aumann (1976) et Brandenburger et Dekel (1987) le définissent de la façon suivante. Les croyances *a posteriori* de chaque agent doivent être spécifiées partout et en particulier dans les états du monde ayant une probabilité (*ex ante*) nulle. Ainsi les mesures de probabilité *a priori* sont restreintes aux mesures satisfaisant la propriété (*): pour tout joueur i , pour tout $\omega \in \Omega$, $P_i(\cdot | \Pi_i(\omega))$ doit être une mesure de probabilité sur Ω et doit satisfaire $P_i(\Pi_i(\omega) | \Pi_i(\omega)) = 1$. Bien sûr si $P_i(\Pi_i(\omega)) > 0$, alors par la règle de Bayes, $P_i(\cdot | \Pi_i(\omega))$ satisfait les deux propriétés précédentes mais ceci doit être aussi vrai même lorsque $P_i(\Pi_i(\omega)) = 0$. L'équilibre *a posteriori* peut maintenant être défini comme suit.

Définition 4.3. (Aumann [1974], Brandenburger et Dekel [1987]) Soit une structure d'information $(\Omega, \{\Pi_i\}_i, \{P_i\}_i)$, où Ω est l'ensemble des états du monde, Π_i la partition d'information du joueur i et P_i la croyance a priori de i sur Ω . Le vecteur de stratégies corrélées $\sigma := (\sigma_i) : \Omega \rightarrow \prod_i A_i$ est un équilibre corrélé de G associé à la structure d'information $(\Omega, \{\Pi_i\}_i, \{P_i\}_i)$ si

— $\forall i, \sigma_i : \Omega \rightarrow A_i$ est mesurable par rapport à Π_i , i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ pour tout $\omega' \in \Pi_i(\omega)$, et

— $\forall i, \forall \omega \in \Omega, \forall \tau_i : \Omega \rightarrow A_i$ mesurable par rapport à Π_i , on a

$$\sum_{\omega' \in \Pi_i(\omega)} P_i(\omega' | \Pi_i(\omega)) g_i(\sigma_i(\omega'), \sigma_{-i}(\omega')) \geq \sum_{\omega' \in \Pi_i(\omega)} P_i(\omega' | \Pi_i(\omega)) g_i(\tau_i(\omega'), \sigma_{-i}(\omega')).$$

Brandenburger et Dekel (1987) montrent que l'équilibre *a posteriori* est en fait équivalent à la rationalisabilité corrélée (i.e. où les croyances des joueurs sont telles qu'ils croient que leurs opposants ne choisissent pas leurs stratégies de manière indépendante, autrement dit le processus que nous avons appelé \tilde{H}_i dans la sous-section 3.1). Conformément à l'intuition, l'équilibre corrélé et l'équilibre rationalisable sont donc deux concepts très proches, c'est l'hypothèse de croyance *a priori* commune pour l'équilibre corrélé objectif qui semble les distinguer essentiellement.

V. — CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté les fondements épistémiques de trois concepts d'équilibre : l'équilibre de Nash, l'équilibre rationalisable et l'équilibre corrélé. En particulier, nous avons montré que, pour donner un fondement à l'équilibre de Nash, la connaissance commune de la rationalité n'est ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante. Par contre, la connaissance commune de la rationalité est suffisante pour justifier l'utilisation de concepts d'équilibre comme l'équilibre rationalisable ou l'équilibre corrélé.

Nous avons souligné la faiblesse des fondements épistémiques donnés à l'équilibre de Nash. En effet, ces derniers reposent sur les croyances des joueurs sur ce que les autres vont choisir de faire. Il est alors naturel de se demander comment ces croyances émergent. Ces fondements, bien qu'ils soient incomplets, sont bien entendu utiles puisqu'ils clarifient les résultats auxquels un processus explicite de formation des croyances doit arriver pour justifier l'équilibre de Nash : la connaissance par chaque joueur de ce que les autres joueurs vont choisir de faire.

Il existe deux approches pour expliciter la façon dont les croyances des agents se forment : l'approche évolutionnaire et l'approche divinatoire. L'approche divinatoire suppose que les agents forment leurs croyances en exploitant l'information dont ils disposent de manière optimale. L'approche évolutionnaire fait l'hypothèse que les croyances des agents s'ajustent progressivement dans le temps. La formation de ces croyances est essentiellement basée sur l'observation du passé. En ce sens, les agents ont des capacités cognitives limitées. Comme l'approche divinatoire, l'approche évolutionnaire ne permet pas de manière générale de donner un fondement à l'équilibre de Nash. Néanmoins, comme présenté dans l'article de R. Baron et P. Solal dans ce volume, l'équilibre de Nash trouve un fondement évolutionnaire dans certaines classes de jeux économiquement pertinentes. Cette classe contient les jeux de potentiel (Monderer et Shapley [1996]) et les jeux supermodulaires (Milgrom et Roberts [1990]). Milgrom et Roberts [1990] ont montré que dans les jeux supermodulaires où il existe un unique équilibre de Nash, cet équilibre est l'unique profil d'actions justifié par la rationalité et sa connaissance commune. Ceci laisse penser que l'équilibre de Nash pourrait trouver un fondement divinatoire dans cette classe de jeux. Carlsson et van Damme [1993] ainsi que Frankel, Morris et Pauzner [2003] ont montré que dans cette classe de jeux, si l'on introduit une légère perturbation, des agents prenant leurs décisions sur la base de la rationalité et de sa connaissance commune vont nécessairement jouer un équilibre de Nash. Ainsi, l'équilibre de Nash trouve un fondement divinatoire dans les jeux supermodulaires. Cette littérature, communément appelée *global games*, sera présentée dans l'article d'O. Tercieux ainsi que dans celui de J.-M. Tallon dans le même volume.

Finalement, quels enseignements pour l'économie – et particulièrement pour l'économie industrielle – peut-on tirer de cette littérature ? L'équilibre corrélé

et l'équilibre rationalisable semblant recevoir des fondements épistémiques plus satisfaisant que l'équilibre de Nash, il est alors naturel de se demander si ces concepts donnent des prédictions différentes dans des situations économiques pertinentes. Des exemples très simples peuvent nous convaincre de différences importantes. En particulier, Bernheim [1984] (6) a montré que dans un cadre oligopolistique linéaire où les firmes se font concurrence en quantités, l'ensemble des équilibres de Nash et des équilibres rationalisables coïncident si et seulement s'il n'existe que deux firmes. Dans le cas où il existe plus de trois firmes, l'ensemble des équilibres rationalisables pour chaque firme contient toutes les actions entre la production nulle et la production de monopole (incluant nécessairement la production d'équilibre de Nash). Il apparaît ainsi essentiel de comparer les prédictions de ces différents concepts d'équilibre dans des cadres plus généraux.

(6) Voir aussi la généralisation proposée par Basu [1992].

Voir références page suivante

RÉFÉRENCES

- AUMANN R. [1974, « Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies », *Journal of Mathematical Economics*.
- AUMANN R. [1976], « Agreeing to Disagree », *The Annals of Statistics*, 4, 1236-1239.
- AUMANN R. [1987], « Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality », *Econometrica*, vol. 55, 1, pp. 1-18.
- AUMANN R. [1995], « Backward Induction and Common Knowledge of Rationality », *Games and Economic Behavior*, vol. 8, pp. 6-19.
- AUMANN R. BRANDENBURGER A., [1995], « Epistemic Conditions for Nash Equilibrium », *Econometrica*, vol. 63, 5, pp. 1161-1180.
- BASU K. [1992], « A Characterization of the Class of Rationalizable Equilibria of Oligopoly Games », *Economics Letters*, vol. 40, pp. 187-192.
- BERNHEIM D. [1984], « Rationalizable strategic behavior », *Econometrica*, vol. 52, pp. 1007-1028.
- BINMORE K. [1987], « Modeling Rational Players », *Economics and Philosophy*, 3, pp. 9-55, 4, pp. 179-214.
- BRANDENBURGER A., DEKEL E. [1987], « Rationalizability and Correlated Equilibria », *Econometrica*, 55, pp. 1391-1402.
- FUDENBERG D., TIROLE J. [1988], « Game Theory », The MIT Press.
- GLICKSBERG I. L. [1952], « A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points », *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38, pp. 170-174.
- HARSANYI J.-C. [1973], « Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points », *International Journal of Game Theory*, 2, pp. 1-23.
- HURKENS S. [1995], « Learning by forgetful players », *Games and Economic Behavior*, vol. 11, pp. 304-329.
- MILGROM P., ROBERTS, J. [1990], « Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities », *Econometrica*, vol. 58, pp. 1255-1277.
- MONDERER D., SHAPLEY L.-S. [1996], « Potential games », *Games Economic Behavior*, vol. 14, pp. 124-143.
- NASH J. [1951], « Equilibrium points in n -person games », *Proceedings of the National Academy of Sciences* vol. 36, pp. 48-49.
- PEARCE D. [1984], « Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection », *Econometrica*, vol. 52, 4, pp. 1029-1050.
- RENY P. [1999], « On the existence of pure and mixed Nash equilibria in discontinuous games », *Econometrica* 67, pp. 1029-1056.
- SAMUELSON L. [2004], « Modeling Knowledge in Economic Analysis », *Journal of Economic Literature*, vol. XLII, pp. 367-403.
- SHAPLEY L.-S. [1964], « Some Topics in Two-Person games », *Annals of Mathematical Studies*, col. 5, pp. 1-28.
- TAN et WERLANG [1988], « The Bayesian foundations of solutions concepts in games », *Journal of Economic Theory*, 45, pp. 370-391.
- YOUNG P. [1993], « The evolution of conventions », *Econometrica*, vol. 61, pp. 57-84.

E-mail: (menager@univ-paris1.fr), et (Tercieux@pse.ens.fr).