Correction des exercices sur la différentiation

Exercice 1 : Hotelling, localisation linéaire

Remarque introductive 1 : Le modèle d'Hotelling est utilisé la plupart du temps comme un modèle de duopole avec différenciation horizontale. Dans cette interprétation, le paramètre de coût de transport c peut être vu comme une mesure de la différenciation entre les deux entreprises : si $c = 0$, il n'y a pas de différenciation et on a affaire à un duopole à la Bertrand ; plus c est grand, plus la différenciation est importante et plus le pouvoir de monopole local des entreprises est fort.

Remarque introductive 2 : Le modèle de duopole avec différenciation horizontale à la Hotelling est très standard. Il est à la base de nombreux modèles où le microéconomiste a besoin de faire intervenir de la différenciation horizontale et/ou quand l'hypothèse de concurrence à la Bertrand “pure" conduit à des résultats trop tranchés (prix égal au coût marginal, profit nul, etc.).

Question préliminaire : Biens identiques (ie pas de différenciation), une période, pas de contrainte de capacité. $p_1 = p_2 = K$, profits nuls.

Question 1. Le timing jeu décrit par l'énoncé est le suivant :

- **date 1 :** les entreprises 1 et 2 choisissent simultanément et non coopérativement leur localisations l_1 et l_2.
- **date 2 :** Chaque entreprise observe la localisation de l'autre. Les entreprises se font concurrence en prix.

Pour trouver l'équilibre de ce jeu, on va raisonner par induction arrière, ie on va résoudre le jeu en partant de la date 2.

S'il habite en x, acheter une unité à la firme i lui coûte $p_i + c(x - l_i)^2 = \tilde{p}_i(x)$. Faire deux schémas : le segment avec les firmes qui se positionnent autour d'un consommateur localisé en x (sans pertes de généralité, on supposera que $l_1 \leq l_2$ pour tout l'exercice) et un second dans le plan (x, p) représentant $\tilde{p}_1(x)$ et $\tilde{p}_2(x)$.

Question 2. Soit un consommateur $x \in [0, 1]$. Alors :

$$
\begin{aligned}
x \text{ préfère acheter en } 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \tilde{p}_1(x) \leq \tilde{p}_2(x) \\
&\Leftrightarrow \quad p_1 + c(x - l_1)^2 \leq p_2 + c(x - l_2)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad c(l_2 - l_1)(2x - (l_1 + l2)) \leq p_2 - p_1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq \bar{l} + \tfrac{1}{2c}\tfrac{p_2 - p_1}{l_2 - l_1}
\end{aligned}
$$

avec $\bar{l} = \frac{l_1+l_2}{2}$. Le consommateur situé en $\tilde{x} = \bar{l} + \frac{1}{2c}\frac{p_2-p_1}{l_2-l_1}$ est indifférent entre les deux entreprises. On déduit de l'inégalité précédente que la demande qui s'adresse à l'entreprise 1 (resp. à l'entreprise 2) vaut $D_1(p_1,p_2) = \tilde{x}$ (resp. $D_2(p_1,p_2) = 1-\tilde{x}$). Les profits π_1 et π_2 des entreprises 1 et 2 s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1(p_1,p_2) = (p_1-K)\left(\bar{l} + \frac{1}{2c}\frac{p_2-p_1}{l_2-l_1}\right) \\ \pi_2(p_1,p_2) = (p_2-K)\left(1-\bar{l} - \frac{1}{2c}\frac{p_2-p_1}{l_2-l_1}\right) \end{array}\right.$$

Question 3. Étant donnés l_1 et l_2, on cherche l'équilibre de Nash du jeu de concurrence en prix. Cherchons la meilleure réponse $p_1 = R_1(p_2)$ de l'entreprise 1 à l'entreprise 2 : $R_1(p_2) = \arg\max_{p_1} \pi_1(p_1,p_2)$. On peut voir assez facilement que $R_1(p_2)$ est une solution intérieure, de sorte que $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1}(R_1(p_2),p_2) = 0$. Or,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 & \Leftrightarrow & \bar{l} + \frac{1}{2c}\frac{p_2-p_1}{l_2-l_1} - (p_1-K)\frac{1}{2c}\frac{1}{l_2-l_1} = 0 \\ & \Leftrightarrow & 2p_1 = p_2 + K + 2c(l_2-l_1)\bar{l} \end{array}$$

D'où

$$R_1(p_2) = \frac{1}{2}\left[p_2 + K + 2c(l_2-l_1)\bar{l}\right]$$

De même, on montrerait que $R_2(p_1) = \frac{1}{2}\left[p_1 + K + 2c(l_2-l_1)(1-\bar{l})\right]$.

Un équilibre de Nash du jeu de concurrence vérifie $\bar{p}_i = R_i(R_{-i}(\bar{p}_i))$, $i = 1,2$ (graphique à faire). En utilisant les deux formules des meilleurs réponses obtenues ci-dessus, il vient alors immédiatement que :

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{p}_1 = K + \frac{2}{3}c(l_2-l_1)(1+\bar{l}) \\ \bar{p}_2 = K + \frac{2}{3}c(l_2-l_1)(2-\bar{l}) \end{array}\right.$$

On vérifie l'intuition donnée dans la remarque introductive : quand $c = 0$, il n'y a pas de différenciation et on retrouve le résultat de Bertrand, à savoir que le prix d'équilibre est égale au coût marginal. Si $c > 0$, plus les entreprises sont différenciés ($l_2 - l_1$ "grand"), plus le pouvoir de monopole local de chaque entreprise est grand et donc plus les prix qu'elles affichent sont élevés.

On a également que :

$$\begin{array}{rcl} \bar{p}_1 = \bar{p}_2 & \Leftrightarrow & [l_1 = l_2] \text{ ou } [1+\bar{l} = 2-\bar{l}] \\ & \Leftrightarrow & [l_1 = l_2] \text{ ou } [l_1 + l_2 = 1] \end{array}$$

Si les deux entreprises sont au même endroit (pas de différenciation), tout se passe comme si elle se faisait concurrence à la Bertrand : $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = K$. Le cas $l_1 + l_2 = 1$ correspond à la situation où les deux entreprises sont symétriques par rapport au "milieu" du marché ($x = 0.5$).

Question 4. On résout maintenant le jeu à l'étape 1, ie le jeu de localisation. Les profits des deux entreprises s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\Pi}_1(l_1,l_2) = (\bar{p}_1-K)\left(\bar{l} + \frac{1}{2c}\frac{\bar{p}_2-\bar{p}_1}{l_2-l_1}\right) \\ \bar{\Pi}_2(l_1,l_2) = (\bar{p}_1-K)\left(1-\bar{l} - \frac{1}{2c}\frac{\bar{p}_2-\bar{p}_1}{l_2-l_1}\right) \end{array}\right.$$

Soit, tous calculs faits,

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\Pi}_1(l_1,l_2) = \frac{2}{9}c(l_2-l_1)(1+\bar{l})^2 \\ \bar{\Pi}_2(l_1,l_2) = \frac{2}{9}c(l_2-l_1)(2-\bar{l})^2 \end{array}\right.$$

Evidemment si $c = 0$... Bertrand.

Question 5. On raisonne comme dans la question précédente pour trouver les fonctions de meilleur réponse : $R_i(l_{-i}) = \arg\max_{l_i} \bar{\Pi}_i(l_i, l_{-i})$. En fait, ici, $R_i(l_{-i})$ est une solution de bord. Pour voir cela calculons la dérivée de $\bar{\Pi}_1$ par rapport à l_1, à l_2 donné :

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial l_1}(l_1, l_2) = \frac{1}{9} c(1+\bar{l})[l_2 - 3l_1 - 2]$$

Il est alors immédiat de constater que, quel que soit l_2, $\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial l_1}(l_1, l_2) < 0$. La meilleure réponse à l_2 constitue donc toujours pour l'entreprise 1 à choisir la plus petite valeur de l_1 possible : $\forall l_2$, $R_1(l_2) = 0$. De même, on montrerait que $\forall l_1$, $R_2(l_1) = 1$. Le jeu de localisation admet donc un unique équilibre de Nash (vérifiant $l_1 \leq l_2$) : $(l_1^\star, l_2^\star) = (0, 1)$.

Remarque 1 : Si on avait cherché des solutions intérieures, on aurait trouvé $l_1 = -\frac{1}{4}$ et $l_2 = -\frac{5}{4}$.

Remarque 2 : Au moment de choisir sa localisation (ie son degré de différenciation), une entreprise arbitre entre les deux effets suivants : en s'éloignant du "centre", l'entreprise peut 1) augmenter ses prix (moins de concurrence sur les bords), mais 2) elle a moins de part de marché. Le premier effet agit comme force centripète (qui pousse vers la périphérie), le second comme une force centrifuge (qui ramène vers le centre). Dans l'exercice, l'utilisation de coût de transport quadratique fait que les entreprises arbitrent toujours en faveur de l'effet centripète à l'équilibre. Ce n'est pas un résultat général.

Remarque 3 : Les idées ébauchées dans la remarque 2 sont en réalité assez profondes. Elles sont notamment à la base de l'économie géographique.

Exercice 2 : Salop, localisation circulaire

Remarque introductive 1 : Le modèle décrit dans cet exercice est très proche du duopole à la Hotelling : c'est un modèle d'oligopole avec différenciation horizontale. Pourquoi prendre un cercle plutôt qu'un segment ? La raison est simple : en plaçant n entreprises sur un segment, les entreprises les plus proches des bords (0 et 1) sont ou bien avantagées ou bien désavantagées par rapport aux autres. Les conclusions d'un tel modèle seraient alors "polluées" par le comportement des entreprises les plus proches des bords. D'où l'idée de ne pas mettre de "bords", c'est-à-dire de prendre un cercle !

Remarque introductive 2 : Les localisations des entreprises sont fixées de façon exogènes. Les entreprises sont supposées équidistantes, c'est une hypothèse de symétrie : aucune entreprise n'est favorisée ex ante par rapport à une autre. Le modèle décrit ici est donc un pur modèle d'oligopole avec concurrence en prix et différenciation horizontale.

On cherche un équilibre de Nash symétrique $(p_1, p_2, \ldots, p_n) = (\bar{p}, \bar{p}, \ldots, \bar{p})$ du jeu de concurrence en prix entre les n entreprises. La démarche est la suivante : 1) on suppose que $(\bar{p}, \bar{p}, \ldots, \bar{p})$ est un équilibre, 2) on regarde toutes les déviations individuelles possibles et on montre qu'aucune de ces déviations n'est profitable.

On note F_1, F_2,..., F_n les n entreprises (placées dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cercle : F_2 est sur la droite de F_1 qui est elle-même sur la droite de F_n, etc.).

Remarquons que, pour un équilibre symétrique, la demande se partage de façon égale entre chaque entreprise. Autrement dit, si le marché est couvert, la demande qui s'adresse à chaque entreprise vaut $\frac{1}{n}$.

Question 1. $\bar{p} - \frac{t}{n} < p < \bar{p} + \frac{t}{n}$. Ici, tout se passe comme dans l'exercice 1. Le consommateur indifférent entre F_n et F_1 est situé à entre F_n et F_1. Soit d la distance qui le sépare de F_n (et donc $\frac{1}{n} - d$ la distance qui le sépare de F_1). d est tel que $u - p - td = u - \bar{p} - t\left(\frac{1}{n} - d\right)$, c'est-à-dire $d = \frac{1}{2n} + \frac{\bar{p}-p}{2t}$.

Si ce consommateur consomme effectivement (ce qui est équivalent à faire l'hypothèse que u est suffisamment grand, la demande qui s'adresse à l'entreprise F_n est $D_n(p, \bar{p}) = 2d = \frac{1}{n} + \frac{\bar{p}-p}{t}$ (demande des "deux côtés" de F_n). Le profit de déviation de l'entreprise F_n qui s'écrit donc :

$$\Pi^{dev}(p, \bar{p}) = (p - c)\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{p} - p}{t}\right) - f$$

Question 2. Pour $p > \bar{p} + \frac{t}{n}$ la demande qui s'adresse à la firme F_n est nulle.
Une autre façon de voir cela est de supposer, par exemple, que l'entreprise F_n dévie de l'équilibre $\bar{p}$ en affichant un prix p tel que $p > \bar{p} + \frac{t}{n}$. Montrons qu'alors la demande D_n qui s'adresse à l'entreprise n est nulle. Pour cela, il suffit de montrer que le consommateur localisé au même point que F_n préfère acheter chez F_1 (ou F_{n-1}) plutôt que chez F_n. En effet, dans ce cas, a priori, tous les autres consommateurs préfèrent aussi acheter chez F_1 ou F_{n-1} plutôt que chez F_n.

Le consommateur localisé en F_n obtient $u - p$ s'il achète chez F_n et $u - \bar{p} - \frac{t}{n}$ s'il achète chez F_1 (les entreprises étant équidistantes, la distance qui sépare F_n de F_1 est $\frac{1}{n}$). Or, il est immédiat de constater que $u - \bar{p} - \frac{t}{n} > u - p$ puisque $p > \bar{p} + \frac{t}{n}$.

Question 3. $(\bar{p}, \bar{p}, \ldots, \bar{p})$ est un équilibre de Nash si $\bar{p}$ est la meilleure déviation de F_n, ie si $\bar{p} = \arg\max_p \Pi^{dev}(p, \bar{p}) = (p - c)\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{p}-p}{t}\right) - f$. Autrement dit, si et seulement si $\frac{\partial \Pi^{dev}}{\partial p}(\bar{p}, \bar{p}) = 0$ (le profit étant concave, la condition de second ordre est vérifiée). Or, $\frac{\partial \Pi^{dev}}{\partial p}(p, \bar{p}) = \frac{1}{n} + \frac{\bar{p}-p}{t} - \frac{1}{t}(p - c)$, donc :

$$\frac{\partial \Pi^{dev}}{\partial p}(\bar{p}, \bar{p}) = 0 \Leftrightarrow \bar{p} = c + \frac{t}{n}$$

Si $t = 0$, ie pas de différenciation, on retrouve le résultat de concurrence à la Bertrand "pure" : $\bar{p} = c$. De plus $\bar{p}$ est une fonction décroissante de n : plus il y a de concurrence, plus le prix qui s'établit à l'équilibre est bas.

Question 4. C'est le seul candidat possible pour un équilibre symétrique. Il reste juste à vérifier qu'une déviation $p < \bar{p} - \frac{t}{n}$ ne peut procurer qu'un profit négatif à l'entreprise qui dévie. Pour une telle déviation, le profit de déviation est de la forme :

$$\Pi^{dev} = (p - c)D(p, \bar{p}) - f < (\bar{p} - \frac{t}{n} - c)D(\bar{p} - \frac{t}{n}, \bar{p}) - f = -f < 0$$

Conclusion : Il existe un unique équilibre de Nash symétrique $(\bar{p}, \bar{p}, \ldots, \bar{p})$. De plus, $\bar{p} = c + \frac{t}{n}$

Il y assez de "place" sur le marché tant que le profit de chaque entreprise est positif. A l'équilibre symétrique du jeu de concurrence avec n entreprises, le profit d'une entreprise vaut $\Pi = (\bar{p} - c)\frac{1}{n} - f = \frac{t}{n^2} - f$ qui est une fonction décroissante de n (plus il y a d'entreprises, plus la concurrence est forte et donc plus le profit est faible). Π est donc positif tant que $n \leq \sqrt{\frac{t}{f}} = \bar{N}$ (remarquons que $\bar{N}$ a peu de chances d'être entier mais c'est un détail, on peut en effet toujours prendre la partie entière...). $\bar{N}$ est d'autant plus grand que t est grand et que f est petit. Intuitivement, si t est grand (forte différenciation), les consommateurs ont des préférences très marquées : c'est un marché de “niches" où chaque entreprise est en position de monopole local sur un faible nombre de consommateurs. Plus le coût fixe f (usine, infrastructure,...) est grand, plus une entreprise doit réaliser un bénéfice net du coût fixe ($(\bar{p} - c)\frac{1}{n}$) élevé pour le financer. Or, ce dernier est d'autant plus petit qu'il y a un grand nombre d'entreprises présentes sur le marché.

Question 5. Tous les consommateurs achètent le bien à l'équilibre (on dit que le marché est “couvert") si le bénéfice u qu'ils retirent de sa consommation est suffisamment élevé. Plus précisément, tous les consommateurs achètent le bien s'ils en retirent une utilité $u - \bar{p} - td$ positive (où d est la distance qui sépare un consommateur de l'entreprise la plus proche). A priori, si les consommateurs situés exactement à mi-chemin entre deux entreprises souhaitent acheter le bien, tous les autres consommateurs le souhaitent aussi (ie le marché est couvert). Ces consommateurs “médians" ont une utilité $u - \bar{p} - \frac{t}{2\bar{N}}$ s'ils achètent le bien. Donc le marché est couvert si et seulement si :

$$\begin{aligned} u - \bar{p} - \tfrac{t}{2n} \geq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad u - (c + \tfrac{t}{\bar{N}}) - \tfrac{t}{2\bar{N}} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad u - c - \tfrac{3}{2}\sqrt{tf} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad f \leq \tfrac{4}{9t}(u-c)^2 = \bar{f} \end{aligned}$$

Si $f > \bar{f}$, l'hypothèse de marché couvert ne tient plus [1]. Dans ce cas, chaque entreprise est en position de monopole local et certains consommateurs n'achètent pas le bien.

Question bonus. Cherchons combien d'entreprises ferait rentrer un planificateur bienveillant. Écrivons le bien-être collectif comme la somme du surplus des consommateurs (S_c) et des profits des n entreprises :

$$W = S_c + n\Pi$$

D'après la question précédente, $\Pi = (p - c)\frac{1}{n} - f$. Du côté des consommateurs, S_c est égal à n fois le surplus des consommateurs qui achètent le bien à l'entreprise F_1 (par exemple). Les consommateurs achetant chez F_1 sont ceux qui sont à une distance inférieure à $\frac{1}{2n}$ de F_1, d'où :

$$\begin{aligned} S_c &= n\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} (u - p - t|x|)dx \\ &= 2n\int_{0}^{\frac{1}{2n}} (u - p - tx)dx \\ &= u - p - \tfrac{t}{4n} \end{aligned}$$

D'où :

$$W = u - c - \left(\frac{t}{4n} + nf\right)$$

1. Si on peut agir sur le niveau des prix, il est possible néanmoins possible d'assurer la couverture du marché en choisissant le prix p qui donne une utilité nulle aux consommateurs équidistants entre deux entreprises : $p = u - p - \frac{t}{2n}$, où n est le nombre d'entreprises qui entrent sur le marché étant donné le prix p.

Donc le surplus est maximal quand le second membre de cette équation est minimal [2]. Il y a deux effets qui apparaissent : plus n est grand, plus la concurrence est forte (effet positif sur le bien-être : $\frac{t}{4n}$) mais plus il y a de coûts fixes (nf) à supporter. En écrivant la condition du premier ordre de maximisation du surplus sur n, il aisé de voir que la valeur $N^\star$ qui maximise le surplus vaut :

$$N^\star = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{f}} = \frac{1}{2}\bar{N} < \bar{N}$$

Du point de vue de l'optimalité, il y a donc trop d'entreprises (ie trop de produits) sur le marché. La raison est la suivante : au moment d'entrer sur le marché, une entreprise n'internalise pas le coût social de son entrée sur le marché, à savoir f.

Exercice 3 : Dixit-Stiglitz

Question 1. On raisonne par induction arrière, ie on va résoudre le jeu en partant de la date 2.

Question 2a. On cherche le prix qui maximise le profit

$$\pi_i(p_i) = N(p_i - c)x_i(p) - f$$

Pour cela on résout le programme de maximisation sous contrainte qui peut se réécrire comme

$$\max_{x_i, m} r - \sum_i p_i x_i + \frac{1}{n(1-a)} \sum_i x_i^{1-a}$$

La CPO conduit à $x_i = (np_i)^\beta$ avec $\beta \equiv -\frac{1}{a}$
La CPO du profit nous donne après réécriture :

$$(np_i)^{\beta-1}[np_i + p_i\beta n - c\beta n] = 0 \Leftrightarrow p^\star = 0 \text{ ou } p^\star = \frac{c}{1-a} \quad \forall i$$

On remarque que $p^\star = \frac{c}{1-a} > c$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\pi^\star &= N\left[\left(\frac{c}{1-a} - c\right)\left(n\frac{c}{1-a}\right)^\beta\right] - f \\
&= \frac{Na}{n^{1/a}}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{\frac{1-a}{a}} - f
\end{aligned}$$

On évacue le cas dégénéré ou $p^\star = 0$. Dans ce cas, les profits sont négatifs. Les firmes sortent. L'autre équilibre est donné par

$$\xi = \left\{p^\star = \frac{c}{1-a}, x_i^\star = \left(\frac{nc}{1-a}\right)^\beta, \pi^\star = \frac{Na}{n^{1/a}}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{\frac{1-a}{a}} - f\right\}$$

2. Remarquons que le prix d'équilibre n'apparaît pas dans l'écriture du bien-être. En effet, dans la mesure où le marché est couvert, les prix sont des purs transferts entre les deux types d'agents : ce qui est perdu par l'un est gagné par l'autre. Si le marché n'était pas couvert, il faudrait prendre en compte l'impact de p sur la demande totale. C'est la raison pour laquelle les modèles de différenciation de type Hotelling ou Salop (où le nombre d'entreprises est exogène) sont peu appropriés pour rendre compte de problématique liées à l'accès à un marché (par exemple, service universel dans les télécoms).

Question 2b. A l'équilibre de libre entrée $\pi^\star = 0$ soit encore $\frac{Na}{n^{1/a}}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{\frac{1-a}{a}} = f$ d'où

$$n^\star = \left(\frac{Na}{f}\right)^a \left(\frac{1-a}{c}\right)^{1-a}$$

$n^\star$ a très peu de chance d'être un entier. Ainsi, l'équilibre de libre entrée est constituée de la partie entière de $n^\star$, les firmes réalisant un profit (faible) positif.

Question 3.
- le prix d'équilibre est indépendant du nombre de firmes ;
- Le nombre de consommateurs augmente $\Longrightarrow$ les profits augmentent. Effectivement, la taille du marché augmentent.
- Le nombre de firmes augmente : il y a plus de produits différents distribués sur le marché, donc les consommateurs ont plus de choix d'où des profits à la baisse.
- A l'équilibre de libre entrée : plus le coût fixe est petit plus il y a de firmes qui veulent entrer. De même, plus N est grand, plus le nombre de firme qui veulent entrer est important.

Question 4. cf cours.

Question 5.

$$\lim_{n\to+\infty} \pi^\star = -f, \lim_{f\to 0^+} n^\star = +\infty, \lim_{N\to+\infty} n^\star = +\infty$$