Olivier TERCIEUX (*)
Paris-Jourdan Sciences économiques (PSE) et CNRS

SÉLECTION D'ÉQUILIBRE PAR L'INFORMATION INCOMPLÈTE

Mots-clés : Information incomplète, risque-dominance, incertitude d'ordre élevé, robustesse.

Key words : Imcomplete Information, Risk-dominance, Higher Order Uncertainty, Robutness

I. — INTRODUCTION

Avant le travail pionnier de Harsanyi (1967), la théorie des jeux était soumise à la critique selon laquelle la plupart de ses résultats étaient dépendants d'une hypothèse irréaliste : celle de connaissance commune des paiements du jeu (1). En effet, l'étude de la décision d'un joueur dans un cadre où il existe de l'incertitude sur les paiements implique de formaliser les croyances de ce joueur sur les paiements du jeu ou autrement dit les croyances d'ordre 1. Mais, ceci implique aussi de formaliser les croyances d'ordre 2, c'est-à-dire les croyances de ce joueur sur les croyances des autres quant aux paiements du jeu. Puis nécessairement les croyances aux ordres 3, 4, … et ce jusqu'à l'infini. Cette apparente difficulté a longtemps semblé insurmontable ; ce n'est qu'avec le travail de Harsanyi (1967) – et l'introduction de la notion de type – que ces notions induites par l'information incomplète ont pu être formalisées

(*) Je remercie Victor Hiller pour sa lecture attentive et ses remarques.

(1) Nous rappelons que les paiements d'un jeu sont connaissance commune si tout le monde sait les paiements de ce jeu, tout le monde sait que tout le monde sait les paiements de ce jeu,... itéré à l'infini.

complètement. On a pu alors construire des modèles où les paiements n'étaient plus connaissance commune (2).

Dès lors, s'est ouverte la possibilité de mesurer les implications de l'hypothèse de connaissance commune. Le premier article à se poser la question est celui de Rubinstein en 1989. Rubinstein propose un jeu très simple à deux actions et deux joueurs où, lorsqu'on fait l'hypothèse de connaissance commune, il existe plusieurs équilibres. Ainsi lorsqu'on suppose que tout le monde connaît les paiements du jeu, tout le monde sait que tout le monde connaît les paiements du jeu etc., (K fois) où $K = + \infty$, il existe plusieurs équilibres. Mais Rubinstein montre que dans son exemple, lorsque $K < + \infty$ il n'existe plus qu'un unique équilibre, et ce, alors même que K peut être arbitrairement grand. Ce résultat laisse penser que les croyances d'ordre très élevé sont cruciales en théorie des jeux et que le comportement d'équilibre se trouve affecté par ces dernières. Suite à l'article de Rubinstein, de nombreux auteurs ont montré comment ce résultat pouvait être généralisé (voir parmi d'autres : Carlson et van Damme (1993), Morris, Rob et Shin (1995), Kajii et Morris (1997), Frankel, Morris et Pauzner (2003),…).

Il semble donc désormais clair que les croyances d'ordre élevé sont essentielles pour déterminer l'ensemble des équilibres. Dans la première partie de cet article, nous tâcherons de voir quels sont les arguments essentiels à ce résultat (sections 2 et 3). Pour cela nous nous concentrerons sur un exemple représentatif (section 2) et nous séparerons notre analyse entre études de la structure d'information (sous-section 3 – 1) et de la structure des paiements (sous-section 3 – 2). Enfin, puisque les détails très fins de l'information à la disposition des joueurs ont un impact très fort sur l'ensemble des équilibres, et qu'il est raisonnable de penser que le modélisateur ne disposera pas nécessairement de ces détails, il est naturel d'essayer de trouver des conditions sous lesquelles le modélisateur dispose de prédictions fiables. Nous présenterons donc les caractérisations de ce que Kajii et Morris (1997) appellent des équilibres robustes à l'information incomplète (section 4).

II. — UN EXEMPLE REPRÉSENTATIF

Afin d'illustrer notre propos, nous utiliserons un exemple principal. Considérons donc un jeu où deux individus doivent décider simultanément de

(2) Bien sûr, il est bien connu que la structure des paiements peut toujours être considérée de façon triviale comme connaissance commune. Plus exactement, l'application (notée g) qui à un état de la nature ω fait correspondre les paiements effectifs lorsque le vrai état est ω doit être considérée nécessairement comme connaissance commune. Quand nous parlons du fait que les paiements ne sont pas connaissance commune, nous considérons les paiements donnés par $g(\omega)$ (*i.e.* une valeur donnée par cette application et non pas l'application elle-même).

s'engager dans un investissement. Les agents ont deux choix : « Investir » (noté I) ou « Ne pas Investir » (noté *NI*). Si un individu décide de ne pas investir, alors il ne retire aucun bénéfice et ne subit aussi aucune perte. Si un individu décide d'investir, son gain est relié au choix de l'autre individu. Lorsque les deux individus investissent simultanément, leur gain est de $X > 0$. Mais si un individu investit, alors que l'autre décide de ne pas investir, cet individu fait une perte de $2X$. Le jeu peut alors être écrit de façon standard sous la forme de la matrice de gains suivante :

		Joueur 2	
		NI	*I*
Joueur 1	*NI*	0, 0	$0, -2X$
	I	$-2X, 0$	X,X

On rappelle qu'un jeu en information complète est une structure $[I, \{A_i\}_{i\in I}, \{g_i]_{i\in I}]$ où I est l'ensemble des joueurs. Pour chaque joueur i, A_i est son ensemble d'actions et $g_i : \times_{i\in I} A_i \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction de paiement. Le jeu précédent sera appelé G et est donc défini comme $G \equiv [\{1, 2\}, \{NI, I\}_{i\in\{1,2\}}, \{g_i\}_{i\in\{1,2\}}]$ où $\{g_i\}_{i\in\{1,2\}}$ est la fonction de paiement définie par la matrice ci-dessus.

Interprétation économique : ce jeu – bien qu'extrêmement simple dans sa structure – peut être rapproché de beaucoup d'exemples économiquement intéressants. Tout d'abord il a la particularité d'avoir des complémentarités stratégiques (3) et c'est en fait une des hypothèses cruciales de la littérature que nous allons étudier (voir Frankel, Morris et Pauzner (2003)). On peut penser au cas où les individus sont des spéculateurs (de taille importante) ayant par exemple pour objectif de faire décrocher le cours d'une monnaie mais dont l'action est prise de façon indépendante. Il est intuitivement raisonnable de penser que leur action aura d'autant plus de chance d'être un succès qu'ils attaqueront simultanément. De même dans certaines configurations économiques, le spéculateur attaquant risque gros si l'autre spéculateur décide de ne pas se lancer dans l'attaque. Cette interprétation est étudiée (et bien sûr raffinée) dans le papier de Morris et Shin (1998). La plupart des applications économiques de la littérature que nous décrivons dans cet article ont été faites en macroéconomie financière (voir par exemple le survey de Morris et Shin (2003). Néanmoins, des applications ont été aussi faites en économie du développement, économie urbaine,... Le lecteur intéressé est invité à se référer à l'article

(3) On rappelle brièvement que les complémentarités stratégiques sont une propriété sur la structure des paiements qui assure que les joueurs seront d'autant plus incités à augmenter leur action que leurs opposants augmentent leurs actions. Dans notre cas, *NI* correspond à investir 0 euro alors que *I* correspond à investir une somme strictement positive. Avec cet ordre sur les actions (*NI* est plus petit que *I*), il est clair que ce jeu possède des complémentarités stratégiques.

de J.-M. Tallon dans ce même volume. Finalement, indépendamment des thèmes traités dans cette littérature, les jeux à complémentarités stratégiques ont aussi trouvé de nombreuses applications en économie industrielle. À titre d'exemple, nous pouvons penser au cas de deux firmes voulant faire un investissement dans une innovation. Pour une firme, il est intéressant de faire un investissement en innovation si et seulement si l'autre firme en fait autant. Les paiements de ce jeu d'investissements en innovations sont essentiellement les mêmes que dans le jeu décrit plus haut.

2.1. Information complète

Il est clair que si on fait l'hypothèse d'information complète c'est-à-dire de connaissance commune des paiements (4), « investir » pour les deux joueurs est un équilibre de Nash (strict) et « ne pas investir » pour les deux joueurs est aussi un équilibre de Nash strict (5). Ainsi, sur la base d'une hypothèse de connaissance commune des paiements, les prédictions du modélistateur restent indéterminées même si l'on fait l'hypothèse que les agents parviendront à se coordonner sur un équilibre de Nash.

Propriétés des équilibres : grossièrement, les théoriciens des jeux s'intéressant à la sélection d'équilibres se partagent bien souvent entre les tenants de la Pareto-dominance et ceux de la risque-dominance. Donnons un premier aperçu de ces notions – en particulier de celle de risque-dominance qui sera définie formellement dans la section 3.2. Tout d'abord, il est clair que tous les joueurs sont mieux en terme de paiements à l'équilibre (I, I) qu'en n'importe quel autre profil d'actions. Cet équilibre est dit Pareto-dominant. On peut penser que les joueurs vont avoir tendance à se coordonner sur cette solution efficace. Néanmoins, l'autre équilibre, (NI,NI), bien que Pareto-dominé possède une autre propriété qui le rend aussi « intuitivement plausible ». En effet, si l'on considère cet équilibre (NI,NI), lorsqu'un joueur choisit NI, une déviation de l'autre joueur (de NI vers I) n'a aucune conséquence sur ses paiements. Alors que si l'on considère l'équilibre (I, I), lorsqu'un joueur choisit I, une déviation de l'autre joueur de (de I vers NI) lui coûte $3X > 0$. Une déviation d'un opposant est donc relativement moins coûteuse à l'équilibre (NI,NI) comparativement à l'autre équilibre. Dit autrement, l'équilibre (NI,NI) semble être « relativement plus prudent » ; on verra que cette notion intuitive correspond au concept d'équilibre risque-dominant introduit par Harsanyi et Selten en 1988. Bien que nous ne présentions pas dans cette section la définition formelle de la risque-dominance, nous faisons quoi qu'il en soit remarquer une

(4) Nous rappelons qu'un événement E (ici « les paiements sont donnés par le jeu G ») est connaissance commune en un certain état du monde si, en cet état du monde, tout le monde sait E, tout le monde sait que tout le monde sait E,... itéré à l'infini.

(5) On rappelle qu'un équilibre de Nash strict assigne à chaque joueur une action qui est son *unique* meilleure réponse face aux actions d'équilibres des autres joueurs.

propriété importante de cet équilibre : imaginons qu'un joueur croie avec une probabilité au moins $\frac{1}{2}$ que l'autre va jouer *NI*, ce joueur devra alors optimalement choisir *NI*.

2.2. Information incomplète

Nous introduisons maintenant une « légère information incomplète » au jeu précédemment décrit (nous dirons parfois de façon équivalente que nous construisons un jeu en information incomplète « proche » de *G*). Nous pouvons donner un sens précis à la notion de légère information incomplète de deux manières. D'abord, le jeu en information incomplète que nous allons construire sera tel que la probabilité *ex ante* de l'événement « les paiements sont donnés par le jeu en information complète *G* » peut être rendue arbitrairement proche de 1. En second lieu, nous verrons plus tard que le jeu *G* peut être considéré comme presque connaissance commune au sens suivant. En fixant un entier $K > 0$, dans « la plupart » des états du monde, tous les joueurs savent que les paiements sont donnés par *G*, tous les joueurs savent que tous les joueurs savent que les paiements sont donnés par *G*, etc., itéré *K* fois, $K > 0$ pouvant être arbitrairement grand (mais fini). Cette seconde définition réclame des notations additionnelles pour être présentée plus en détail. Nous garderons ce niveau de généralité dans cette section, le lecteur intéressé est invité à poursuivre sa lecture jusqu'à la section 3.1.

Nous construisons donc un jeu en information incomplète « proche » du jeu *G* de la façon suivante. Nous introduisons brièvement un minimum de notations nécessaires à cette section. Un jeu en information incomplète est composé d'une partie *structure informationnelle* et d'une partie *structure des paiements*. La structure d'information est $SI = [I, \Omega, P, \{Q_i\}_{i \in I}]$ où I est l'ensemble des joueurs, Ω est l'espace des états du monde, P une distribution de probabilité sur Ω et Q_i une partition (6) de Ω. Un événement pourra alors être identifié à une partie de Ω. Pour chaque i, la partition Q_i représente l'information à la disposition des joueurs en chaque état du monde. À ce stade précisons simplement que l'information de chaque agent est représentée par la partition Q_i sur l'espace des états du monde. Cette partition s'interprète de la façon suivante. En notant pour chaque $\omega \in \Omega$, $Q_i(\omega)$ comme l'(unique) élément de Q_i contenant ω, $Q_i(\omega)$ représente alors l'ensemble des états du monde que l'individu i ne parvient pas à distinguer de ω lorsque le vrai état du monde est ω.

La structure des paiements peut être définie de la façon suivante : $SP = [I, \{A_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I}]$ où I est encore une fois l'ensemble des joueurs, pour chaque joueur i, A_i est son ensemble d'actions et u_i est une fonction de paiements

(6) On rappelle que pour un espace quelconque E, $Q \subseteq 2^E \backslash \emptyset$ est une partition de E si (1) pour tout $X, Y \in Q$, $[X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset]$ et (2) $E \subseteq \bigcup_{X \in Q} X$.

dépendante de l'état du monde : $u_i : A \times \Omega \to \mathbb{R}$ où on note A l'ensemble des profils d'actions du jeu, *i.e.* $A \equiv \times_{i\in I} A_i$. Un jeu en information incomplète sera alors noté $U = [SI, SP]$ (même si certains éléments sont clairement redondants). Dans la suite, un élément de A_i sera noté a_i, un élément de A sera noté a, et un élément de $A_{-i} \times \equiv_{j\neq i} A_j$ sera noté a_{-i}. De même, pour un ensemble S (fini), $\Delta(S)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur S.

Hypothèses : dans la suite nous poserons un certain nombre d'hypothèses. En particulier, l'ensemble de joueurs I sera fini (on supposera de façon plus forte que I est en fait un ensemble composé de deux joueurs et nous noterons $\{1, 2\}$), Ω sera supposé dénombrable et chaque A_i fini. De même, pour chaque joueur i, la fonction de paiement u_i est une fonction de paiements bornée (7). Nous supposerons en plus tout au long de l'article que la distribution P est strictement positive. Autrement dit, $P(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Dès lors, la probabilité conditionnelle d'un événement sera toujours bien définie par la règle de Bayes.

Notations : une stratégie (mixte) pour le joueur i est une fonction Q_i–mesurable (8) $\sigma_i : \Omega \to \Delta(A_i)$. Nous notons $\sigma_i(a_i \mid \omega)$ pour la probabilité que l'action a_i soit choisie en l'état du monde ω lorsque la stratégie σ_i est jouée par le joueur i. Un profil de stratégies est une fonction $\sigma = (\sigma_i)_{i\in\{1,2\}}$ où σ_i est la stratégie du joueur i. Nous notons $\sigma(a \mid \omega)$ pour la probabilité que le profil d'actions a soit choisi en ω lorsque σ est le profil de stratégies joué ; nous notons σ_{-i} pour $(\sigma_j)_{j\neq i}$; par un léger abus de notations, nous étendrons parfois le domaine de chaque u_i aux stratégies mixtes, nous écrirons alors $u_i(\sigma(\omega), \omega)$ pour $\Sigma_{a\in A}\, u_i(a, \omega)\sigma(a \mid \omega)$. Enfin, les paiements pour le joueur i lorsque le profil de stratégies σ est joué est donné par son espérance d'utilité $\Sigma_{\omega\in\Omega}\Sigma_{a\in A}\, u_i(a,\omega)\sigma(a \mid \omega)P(\omega)$ qui peut s'écrire $\Sigma_{\omega\in\Omega}\, u_i(\sigma(\omega), \omega)P(\omega)$.

Dans le présent article, nous nous concentrerons sur le concept d'équilibre le plus utilisé en théorie des jeux en information incomplète : l'équilibre de Nash Bayésien. Il se définit de la façon suivante :

Définition 2.1. Un profil de stratégies σ est un équilibre de Nash bayésien de U si, pour chaque joueur $i \in \{1, 2\}$, $a_i \in A_i$ et $\omega \in \Omega$,

$$\sum_{\omega'\in Q_i(\omega)} u_i(\sigma(\omega'), \omega')P[\omega' \mid Q_i(\omega)] \geq \sum_{\omega'\in Q_i(\omega)} u_i(a_i, \sigma_{-i}(\omega'), \omega')P[\omega' \mid Q_i(\omega)].$$

Construction du jeu en information incomplète : dans la suite nous fixons $\varepsilon > 0$ (qui peut être arbitrairement petit). En fixant l'ensemble des joueurs, la structure informationnelle du jeu que nous construisons est la suivante :

(7) Plus précisément, il existe $M > 0$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $a \in A$, $i \in I$, $u_i(a, \omega) \leq M$.

(8) Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ pour tout $\omega' \in Q_i(\omega)$.

$SI^{\varepsilon} = [\Omega, P^{\varepsilon}, \{Q_i\}_{i \in \{1,2\}}]$ où $\varepsilon \in (0, 1)$. Nous considérons un espace des états du monde $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et une distribution de probabilité P^{ε} sur Ω de la forme $P^{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon(1 - \varepsilon)^{\omega}$.

La structure des paiements quant à elle est la suivante. Les paiements du joueur 1 sont donnés par le jeu en information complète G dans tous les états du monde différents de 0. Les paiements du joueur 2 sont ceux donnés dans G, et ce, quel que soit l'état du monde. Ainsi, les paiements ne changeront que pour le joueur 1 et que pour l'état 0. De plus, la probabilité *ex ante* de l'état du monde 0 est égale à ε et – comme noté plus haut – peut-être rendue arbitrairement proche de 0. En l'état 0, nous supposons que les paiements du joueur 1 sont tels que dans le jeu en information complète associé (*i.e.* où les paiements sont donnés par $u_i(.; 0)$ pour chaque joueur i), *NI* est une action strictement dominante (*i.e.* elle rapporte strictement plus que toute autre action, et ce, quel que soit le choix d'action de l'autre joueur).

Nous pouvons maintenant représenter l'information privée de chaque joueur à l'aide de partitions comme expliquées plus haut. Le joueur 1 est supposé avoir la partition $Q_1 = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots\}$. Ainsi lorsque le vrai état du monde est $\omega = 0$, le joueur 1 a une information complète au sens où $Q_1(0)$ ne contient aucun autre monde que 0 et donc le joueur 1 *sait* (la définition précise de ce que nous entendons par savoir sera donnée dans la section 3 – 1) que le vrai état du monde est 0. Dans tous les autres états du monde, l'individu 1 ne parvient pas à distinguer entre deux états du monde : le vrai état et un autre état. À titre d'exemple, si le vrai état du monde est $\omega = 1$, le joueur 1 ne parvient pas à distinguer entre l'état du monde 1 et l'état du monde 2. Par contre, il sait que le vrai état du monde ne peut pas être autre chose que 1 ou 2. Ainsi, les croyances *a posteriori* (*i.e.* une fois reçue son information privée $Q_1(1)$) de l'individu 1 seront données par les probabilités conditionnelles de chaque état. De même nous supposerons que la partition de l'agent 2 est $Q_2 = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots\}$. Dès lors, en l'état du monde 1, l'agent 2 attribuera une probabilité nulle à tout état du monde différent de 0 ou 1 et, à titre d'exemple, il attribuera la probabilité $P[0 \mid \{0, 1\}] = \frac{P(0)}{P(0)+P(1)} = \frac{1}{2-\varepsilon}$ à $\omega = 0$. Dans ce qui suit, pour chaque $\varepsilon > 0$, nous noterons U^{ε} pour le jeu en information incomplète ainsi construit.

Remarque 2.2. *On pourrait être tenté d'objecter que les partitions que l'on a choisies ne sont pas endogénéisées. Ce que nous cherchons à faire pour l'instant est de construire un exemple de jeu en information incomplète simple qui est proche du jeu en information complète ; nous verrons ensuite en quel sens il est proche et nous pourrons discuter à ce moment de la pertinence de ces partitions bien particulières. Nous verrons dans la section 4 que le test de robustesse proposé par Kajii et Morris (1997) impose de prendre en compte ce type de partition. Enfin, bien que nous ne nous intéressions pas à la question dans cet article, l'endogénéisation de ces partitions a reçu une attention particulière dans la littérature. D'abord avec l'article pionnier de Rubinstein (1989) qui montre que ces partitions émergent naturellement si les agents com-*

muniquent de façon non stratégique et bruitée avant de jouer. Puis de façon peut-être plus convaincante, le travail de Carlsson et van Damme (1993) introduit une technique de perturbation des paiements assez naturelle et qui de façon étonnante induit ce type de structure d'information (voir l'article de J.-M. Tallon dans le même volume).

En terme de sélection d'équilibres, le résultat surprenant de cette littérature est un résultat d'unicité de l'équilibre (de Nash bayésien). Alors même que dans l'ensemble des jeux que nous avons construit (à chaque $\varepsilon > 0$ est associé un jeu) la probabilité *ex ante* de l'événement « les paiements sont donnés par G » (rappelons que dans G, (I, I) est un équilibre de Nash strict) peut être rendue arbitrairement proche de 1, chacun de ces jeux possède un unique équilibre de Nash bayésien qui consiste pour chaque individu à jouer l'action *NI* en tout état du monde. De plus, on peut montrer que l'unicité de l'équilibre est vraie en un sens très fort puisque l'équilibre est le seul à survivre à l'élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Proposition 2.3. *Fixons $\varepsilon > 0$, U^ε a un unique équilibre de Nash Bayesien σ^* tel que $\sigma^*(\omega) = (NI,NI)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*

Esquisse de preuve : à ce stade, notre objectif étant de faire passer les intuitions essentielles des résultats de sélection de cette littérature avec un minimum de notations, nous présentons informellement les raisons de l'unicité. Tout d'abord il est clair que, en tout équilibre, le joueur 1 doit jouer l'action *NI* en l'état du monde 0. Ceci est simplement dû au fait que les paiements du joueur 1 à l'état du monde 0 sont tels qu'il a une stratégie dominante et que ce joueur 1 sait que le vrai état du monde est 0. Il jouera donc *NI* quel que soit l'équilibre. En l'état du monde 0 ou 1, le joueur 2 attribue une probabilité $\frac{1}{2-\varepsilon} > \frac{1}{2}$ à l'état du monde 0. Ainsi, quel que soit l'équilibre, l'individu 2 attribuera une probabilité d'au moins $\frac{1}{2-\varepsilon} > \frac{1}{2}$ à ce que l'autre joueur joue *NI*. Il est facile de vérifier (voir section 2 – 1) que l'agent 2 a alors une unique meilleure réponse qui consiste à jouer *NI*. Ainsi quel que soit l'équilibre, l'agent 2 jouera *NI* en l'état 0 et 1.

Observons maintenant – aux états du monde 1 ou 2 – que le joueur 1 attribue une probabilité $P[1 \mid \{1, 2\}] = \frac{P(1)}{P(1)+P(2)} = \frac{1}{2-\varepsilon}$ à $> \frac{1}{2}$ à $\omega = 1$. Ainsi par un raisonnement similaire, en l'état du monde 1 ou 2, le joueur 1 devra jouer *NI* quel que soit l'équilibre. Ce raisonnement peut être itéré à l'infini et on arrive à la conclusion que ce jeu en information incomplète possède un unique équilibre qui consiste pour tous les agents à jouer *NI* en tout état du monde. Notons que l'action (de l'équilibre Pareto-dominant) *I* n'est jamais choisie par les agents !

III. — PROPRIÉTÉS

Dans les deux sous-sections à venir, nous allons étudier les deux composantes principales – la structure d'information et la structure des paiements – du jeu en information incomplète ci-dessus. Nous mettrons en évidence les propriétés de la structure d'information puis de la structure des paiements qui permettent le résultat d'unicité précédente.

3.1. De la structure d'information

Tout d'abord intéressons-nous à la structure d'information du jeu précédent. En fixant l'ensemble des joueurs, la structure d'information est alors $SI^{\varepsilon} = [\Omega, P^{\varepsilon}, \{Q_i\}_{i \in \{1,2\}}]$. Nous nous intéresserons aux propriétés, au sein de cette structure d'information, de l'événement $\Omega_G = \{\omega \in \Omega \mid u_i(.; \omega') = g_i(.)$ pour tout $i\}$, ce sous-ensemble de Ω correspond à ce que nous avons appelé jusque-là l'événement « les paiements sont donnés par G » ; et notons que dans U^{ε}, $\Omega_G = \Omega \backslash \{0\}$. Comme nous l'avons déjà mentionné, le jeu en information incomplète U^{ε} est proche de G en deux sens.

Première notion de proximité

$P^{\varepsilon}(\Omega_G) = 1 - \varepsilon$. Comme nous l'avons déjà spécifié, $\varepsilon > 0$ peut-être rendu arbitrairement proche de 0, ainsi formellement, si on considère une suite $\{\varepsilon^l\}_{l \geq 0}$ où $\varepsilon^l > 0$ pour tout l et $\varepsilon^l \to 0$ (quand $l \to +\infty$) alors, la suite de jeux $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ vérifie $P^{\varepsilon^l}(\Omega_G) \to 1$ (notons que dans notre formulation Ω_G ne dépend pas de ε). En ce sens, la suite de jeu $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ converge vers G.

Deuxième notion de proximité

Pour la seconde notion de proximité, nous devons introduire un certain nombre de notations additionnelles. En particulier, nous introduisons l'opérateur de connaissance. Nous ne présenterons ici qu'un nombre limité de propriétés de ces opérateurs. Le lecteur intéressé se référera à l'article de L. Ménager dans le même volume.

Pour une structure d'information donnée, $[\Omega, P, \{Q_i\}_{i \in \{1,2\}}]$, nous définissons l'*opérateur de connaissance* du joueur i : $K_i : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$. Pour $E \in 2^{\Omega}$, $K_i(E) \equiv \{\omega \in \Omega : Q_i(\omega) \subseteq E\}$. Moins formellement, $K_i(E)$ est l'ensemble des états du monde où i sait E. On peut définir l'opérateur de *connaissance mutuelle* K_* : $2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$. Pour $E \in 2^{\Omega}$, $K_*(E) = \bigcap_{i \in \{1,2\}} K_i(E)$, $K_*(E)$ est l'ensemble des états du monde où chaque joueur i sait E. On peut définir l'opérateur de connaissance d'ordre 2 comme suit : $[K_*]^2 : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$. Pour $E \in 2^{\Omega}$, $[K_*]^2(E) = K_*(K_*)(E)$: On définit de la même façon les opérateurs de connaissance d'ordre 3, 4, … Plus généralement, pour $k > 0$, $K_*^k(E)$ est l'ensemble des états du monde où chaque joueur i sait que chaque joueur i sait … (k fois) l'événement E. On peut définir l'opérateur de connaissance commune $CK : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$. Pour $E \in 2^{\Omega}$, $CK(E) = \bigcap_{k=1}^{\infty} [K_*]^k(E)$. Ainsi si $\omega \in CK(E)$, il est vrai qu'en ω, tous les joueurs savent E, tous les joueurs savent que tous les joueurs savent E, etc.

Rubinstein parle dans son article de 1989, de presque connaissance commune. Cette notion n'étant pas définie formellement par Rubinstein (1989), nous proposons la formalisation suivante de l'idée (implicite) de presque connaissance commune. En particulier, dans le jeu précédent (directement inspiré de l'article de Rubinstein) il est possible de montrer la propriété suivante :

Proposition 3.1. *Fixons* $K > 0$. *Pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $\bar{\varepsilon} > 0$ *tel que pour tout* $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, *on a* $P^{\varepsilon}(\bigcap_{k=1}^{K} [K_*]^k(\Omega_G)) \geq 1 - \delta$.

Esquisse de preuve : fixons $K > 0$ et $\delta > 0$. Il suffit de montrer que $[K_*]^k(\Omega_G) = \Omega \backslash \{0, \ldots, k\}$. Ainsi $P^{\varepsilon}(\bigcap_{k=1}^{K} [K_*]^k(\Omega_G)) = 1 - \Sigma_{k=0}^{K} \varepsilon(1 - \varepsilon)^k$, clairement ceci peut être rendu plus grand que $1 - \delta$ lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit.

Notons que pour $\varepsilon > 0$ fixé, et en fixant $K > 0$ arbitrairement grand (mais fini), on peut toujours trouver un état du monde tel que (1) tous les joueurs savent que les paiements sont donnés par le jeu G, tous les joueurs savent que tous les joueurs savent que les paiements sont donnés par G,…(K fois). (2) Néanmoins, en cet état du monde l'action I n'est jouée par aucun joueur ! En ce sens, le comportement stratégique des joueurs dépend fortement des connaissances d'ordre très élevé. En effet, on sait que lorsque $K = +\infty$ alors, (I, I) est un équilibre de Nash.

Plus formellement, la proposition précédente nous dit que si on considère une suite $\{\varepsilon^l\}_{l \geq 0}$ où $\varepsilon^l > 0$ pour tout l et $\varepsilon^l \to 0$ (quand $l \to +\infty$) alors, la suite de jeux $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ vérifie $P^{\varepsilon^l}(\bigcap_{k=1}^{K} [K_*]^k(\Omega_G)) \to 1$. C'est au sens de cette seconde notion de proximité que la suite de jeu $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ converge vers G.

Une définition alternative de la presque connaissance commune

Nous introduisons aussi l'opérateur de *p–croyance* défini par Monderer et Samet (1989) et la notion de *p–croyance commune*. Pour une structure d'information donnée, $[\Omega, P, \{Q_i\}_{i \in \{1,2\}}]$, et $p \in [0, 1]$, nous définissons l'opérateur *p–croyance* du joueur i de la façon suivante : $B_i^p : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$. Pour $E \in 2^{\Omega}$, $B_i^p(E) \equiv \{\omega \in \Omega : P(E \mid Q_i(\omega)) \geq p\}$. Moins formellement, $B_i^p(E)$ est l'ensemble des états du monde où i croit avec une probabilité au moins p l'événement E. De la même façon que pour l'opérateur de connaissance, nous pouvons définir $B_*^p(.) = \bigcap_{i \in \{1,2\}} B_i^p(.)$ ainsi que $\bigcap_{k=1}^{\infty} [B_*^p]^k(.)$. Pour un jeu U, un événement $E \in 2^{\Omega}$, nous dirons que E est *p–croyance commune* en l'état du monde ω dans le jeu U si $\omega \in CB_U^p(E)$ où $CB_U^p(E) \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} [B_*^p]^k(E)$ (9).

(9) En toute généralité, l'opérateur $B_*^p(.)$ devrait lui aussi être indicé par U ; nous omettons cette notation par souci de légèreté.

On peut alors considérer qu'une autre définition raisonnable de la presque connaissance commune est la suivante. L'événement E sera considéré comme presque connaissance commune en $\omega \in \Omega$ si $\omega \in CB^p(E)$ pour un p « proche » de 1. Plus formellement, une suite de jeu $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ converge vers G en ce sens si pour tout $\delta > 0$, il existe $\bar{l}$ tel que pour tout $l > \bar{l}$, $P^{\varepsilon^l}(CB^{1-\delta}_{U^{\varepsilon^l}}(\Omega_g)) \geq 1 - \delta$. Naturellement, en considérant une suite $\{\varepsilon^l\}_{l \geq 0}$ où $\varepsilon^l > 0$ pour tout l et $\varepsilon^l \to 0$ (quand $l \to +\infty$), nous souhaiterions vérifier que la suite $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ converge vers G au sens précédent. Comme nous allons le voir, ce n'est en fait pas le cas.

Proposition 3.2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $CB^p_{U^\varepsilon}(\Omega_G) = \begin{cases} \Omega_G \text{ si } p \leq \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\ ; \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases}$

Esquisse de preuve :

on peut facilement montrer que $[B^p_*]^k(\Omega_G) = \begin{cases} \Omega_G \text{ si } p \leq \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\ ; \\ \Omega_G \setminus \{0, \ldots, k\} \text{ sinon.} \end{cases}$.

Remarque 3.3. *Ainsi en notant que* $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} < \frac{1}{2}$, *il est clair que la suite* $\{U^{\varepsilon^l}\}_{l \geq 0}$ *précédemment décrite ne converge pas vers G au sens de Monderer et Samet (1989). Bien entendu toutes les propriétés énoncées dans cette section sont des propriétés formelles. Elles sont importantes puisqu'elles permettent de mieux mettre en évidence les mécanismes à l'œuvre dans cette littérature. Ce que l'on doit se demander encore une fois est dans quelle mesure ce type de structure d'information a une importance. Le courant des « global games », amorcé par Carlsson et van Damme en 1993, montre que ce type de structure d'information peut émerger parfaitement naturellement (le lecteur intéressé pourra se référer à l'article de J.-M. Tallon dans le même volume), ceci rend l'étude de ces structures particulièrement importante.*

Remarque 3.4. *Comme spécifié plus haut, les opérateurs de croyances fournissent des outils pour étudier les propriétés formelles des structures d'informations qui déterminent les propriétés de l'équilibre. La terminologie utilisée : connaissance, connaissance d'ordre k,... peut laisser penser que les agents sont dotés des capacités pour concevoir ces connaissances et en particulier les connaissances d'ordre infiniment grand – hypothèse évidemment extrêmement forte. En fait, une telle supposition n'est pas nécessaire. En effet, le concept d'équilibre de Nash bayesien peut être justifié d'un point de vue évolutionnaire. Selon cette interprétation, les stratégies d'équilibre correspondent à un état de long terme vers lequel les stratégies adoptées par des agents à rationalité limitée convergeraient à force d'adaptation (voir par exemple Dekel, Fudenberg et Levine (2003)). Dans ce cas précis, les opérateurs précédemment décrits ne sont que des outils, et les agents ne sont pas supposés capables de concevoir des croyances d'ordre élevé. Bien entendu une interprétation divinatoire de l'équilibre de Nash bayésien (comme ceci est souvent fait dans cette littérature) utilisant la rationalisabilité (faisant l'hypothèse de rationalité et de sa connaissance commune) induit naturellement que les agents sont dotés des capacités implicitement définies par les opérateurs* *précédents. Pour des éléments additionnels sur les fondements divinatoires (respectivement évolutionnaires) de concepts d'équilibre, voir l'article de L. Ménager et O. Tercieux (respectivement R. Baron et P. Solal) dans le même volume.*

Remarque 3.5. *Fixons un équilibre de Nash strict du jeu, alors il existe* $p < 1$ *suffisamment proche de* 1 *tel que pour tout* $U = [\{A_i\}_{i\in\{1,2\}}, \Omega, P, \{Q_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{u_i\}_{i\in\{1,2\}}]$ *si* $\omega \in CB^p_U(\Omega_G)$ *alors il existe un équilibre de Nash bayesien du jeu en information incomplète U tel que I est joué en* ω *par chaque joueur* (10). *Cette notion de proximité semble donc utile pour comprendre où la discontinuité se produit. En effet, on peut aussi interpréter le résultat de Rubinstein comme un « problème » de discontinuité de la correspondance d'équilibre de Nash bayesien. Plusieurs articles se sont alors intéressés à définir la topologie (notion de proximité) la moins fine restaurant la continuité de la correspondance d'équilibre. Le lecteur intéressé pourra se référer aux articles de Kajii et Morris (1998) et de Monderer et Samet (1996).*

Notons que la proposition précédente montre que pour une suite $\{\varepsilon^l\}_{l\geq 0}$ la probabilité *ex ante* de l'événement $CB^p_{U\varepsilon^l}(\Omega_G)$ pour $p < 1/2$ tend vers 1 lorsque l tend vers $+\infty$. Ainsi en faisant tendre la probabilité *ex ante* de G vers 1, la probabilité *ex ante* de l'événement $CB^p_{U\varepsilon}(\Omega_G)$ tend vers 1 si $p < \frac{1}{2}$. Un des résultats les plus importants de cette littérature prouvé par Kajii et Morris (1997), montre que cette proposition est vraie indépendamment de la structure d'information considérée. C'est ce que Kajii et Morris appellent : l*e résultat du chemin critique*. Ce dernier met en évidence un lien entre la probabilité *ex ante* d'un événement et la probabilité que cet événement soit *p–croyance commune* pour $p < \frac{1}{2}$ (pour le cas présent de jeux à deux joueurs).

Proposition 3.6. (Le résultat du chemin critique) *Si* $p < \frac{1}{2}$, *alors dans toute structure d'information* $[\Omega, \{Q_i\}_{i\in\{1,2\}}, P]$, pour tout événement E :

$$P[CB^p(E)] \geq 1 - (1 - P[E])\left(\frac{1 + p}{1 - 2p}\right).$$

Nous verrons en quoi ce résultat est crucial dans les résultats généraux de sélection de cette littérature. Plus spécifiquement, cette proposition nous dit que si dans un jeu en information incomplète la probabilité *ex ante* de l'événement les paiements sont donnés par G est élevée alors ceci « borne » l'incertitude d'ordre élevé de la façon suivante : pour tout $p < \frac{1}{2}$, $P[C^p(\Omega_G)]$ est proche de 1.

(10) Pour une preuve de ce résultat voir Kajii et Morris (1997), Lemme 5 – 2 p. 1297.

Dans cette sous-section nous avons étudié les propriétés (nécessaires et suffisantes) de la structure d'information pour que l'argument d'unicité de l'équilibre de notre exemple fonctionne. Intéressons nous maintenant à ce qu'exige sur la structure des paiements ce résultat d'unicité.

3.2. De la structure des paiements

Dans la suite, on considère un jeu en information complète $G \equiv [I, \{A_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I}]$ où l'ensemble des joueurs est $I = \{1, 2\}$, et pour chaque joueur i, A_i est un ensemble fini. Nous reportons les définitions d'un équilibre strictement p–dominant comme formulé dans Morris, Rob et Shin (1995).

Définition 3.7. Fixons $p \in [0, 1]$. Un profil d'actions $a^* = (a_1^*, a_2^*)$ est un équilibre strictement p–dominant de G si pour tout $i \in \{1, 2\}$, $a_i \in A_i \backslash \{a_i^*\}$, et $\pi_i \in \Delta(A_{-i})$ tel que $\pi_i(a_{-i}^*) \geq p$,

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi_i(a_{-i}) g_i(a_i^*, a_{-i}) > \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi_i(a_{-i}) g_i(a_i, a_{-i}).$$

Notons quelques propriétés de l'équilibre strictement p–dominant. (1) d'abord ce concept vérifie une propriété de monotonie au sens suivant : pour $q < p$, si a^* est un équilibre strictement q–dominant, alors c'est un équilibre strictement p–dominant (2) pour $p = 1$, nous retrouvons une définition standard qui est celle d'équilibre de Nash strict, ainsi si on se réfère à la propriété précédente de monotonie, on constate que tout équilibre strictement p–dominant est un équilibre de Nash strict. Ainsi, pour un p fixé, l'ensemble des équilibres p–dominants constitue un sous-ensemble et donc un raffinement de l'ensemble des équilibres de Nash strict (3) pour $p = 0$, un équilibre est p–dominant si et seulement si c'est un équilibre en actions strictement dominantes (4) finalement pour $p \leq \frac{1}{2}$; on peut montrer que si un jeu possède un équilibre p–dominant alors il doit être unique. Les trois premiers points sont intuitifs et faciles à prouver. Pour comprendre le point (4), supposons par contradiction qu'il en existe deux : $a^* = (a_1^*, a_2^*)$ et $b^* = (b_1^*, b_2^*)$. Comme $a^* \neq b^*$, on a nécessairement pour un joueur i, $a_i^* \neq b_i^*$. Maintenant considérons ce joueur i et la distribution de probabilité $\pi_i \in \Delta(A_{-i})$ tel que $\pi_i(a_{-i}^*) = \pi_i(b_{-i}^*) = p$.

Par définition, nous devons avoir que

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi_i(a_{-i}) g_i(a_i^*, a_{-i}) > \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi_i(a_{-i}) g_i(b_i^*, a_{-i})$$

(car a^* est p–dominant pour $p \leq \frac{1}{2}$) mais aussi

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi_i(a_{-i}) g_i(b_i^*, a_{-i}) > \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \pi_i(a_{-i}) g_i(a_i^*, a_{-i})$$

(car b^* est p–dominant pour $p \leq \frac{1}{2}$). Ce qui est clairement une contradiction.

Le résultat suivant généralise notre résultat de la section 2. Il suffit de noter que ce qui compte dans la preuve de la Proposition 2 – 3 de la section 2 est que $(NI\ , NI)$ est un équilibre $\frac{1}{2}$–dominant. Notre Proposition est aussi un cas particulier du résultat principal de [Morris, Rob et Shin (1995), théorème 5-1] ainsi que de [Kajii et Morris (1997), lemme 5-5].

Proposition 3.8. *Fixons $\varepsilon > 0$. Considérons la structure d'information SI^{ε} décrite dans la section 2 et un jeu G où $a^* = (a_1^*\ , a_2^*)$ est un équilibre strictement $\frac{1}{2}$–dominant. Supposons (1) en chaque $\omega \in \Omega \backslash \{0\}$, le jeu en information complète associé à ω est le jeu G, (i.e. $u_i(., \omega) = g_i(.)$ pour tout $\omega \in \Omega \backslash \{0\}$, $i \in \{1, 2\}$) et (2) en $\omega = 0$, a_1^* est strictement dominant pour le joueur 1. Alors, ce jeu possède un unique équilibre de Nash bayésien σ^*. Cet équilibre vérifie* $\sigma^*(\omega) = a^*$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Remarque 3.9. *R. Baron et P. Solal dans le même volume reportent la définition d'un ensemble minimal p–meilleure réponse comme défini dans Tercieux (2004). Le précédent résultat peut être facilement généralisé en utilisant ce concept voir [Tercieux (2004), théorème 4].*

Remarque 3.10. *À plusieurs reprises dans ce texte, nous avons relié (implicitement) la notion d'équilibre strictement p–dominant à la notion de risque-dominance telle que proposée par Harsanyi et Selten (1988). Pour donner un aperçu de ce lien, rappelons que dans un jeu à* deux *actions, disons NI, I, et* deux *joueurs, en notant $g_i : \{NI, I\} \times \{NI, I\} \to \mathbb{R}$, la fonction de paiements d'un joueur i,* (NI,NI) *(stricte) risque-domine* (I, I) *si,* $(g_1(NI,NI) - g_1(I,NI)) \times (g_2(NI,NI) - g_2(NI, I)) > (g_1(I, I) - g_1(NI, I)) \times (g_2(I, I) - g_2(I,NI))$. *On dit alors que* (NI,NI) *est l'équilibre strictement risque-dominant. Il est facile de vérifier qu'avec une hypothèse de symétrie des paiements dans un jeu à deux actions et deux joueurs, un équilibre est strictement risque-dominant si et seulement s'il est strictement p–dominant pour un certain $p < \frac{1}{2}$.*

IV. — UNE FORMALISATION GÉNÉRALE ET LA CARACTÉRISATION DE LA ROBUSTESSE À L'INFORMATION INCOMPLÈTE

Jusqu'ici nous n'avons pas donné un sens précis à la notion de sélection d'équilibre. Nous avons montré que pour des jeux en information incomplète particulier, un équilibre p–dominant pour p suffisamment faible était sélectionné. Mais en quel sens peut-on dire que cet équilibre est un bon équilibre, fiable, robuste ? Afin de répondre à cette question, nous allons présenter le test de robustesse proposé par Kajii et Morris (1997).

Premier aperçu : Kajii et Morris proposent dans un article de 1997, un test de robustesse qui peut s'interpréter de la façon suivante. Considérons un prévisionniste qui s'intéresse à une situation économique particulière. Il modélise cette situation par le biais d'un jeu en information complète sous forme normale noté G. Ce prévisionniste sait que les agents jouent ce jeu G avec une probabilité (*ex ante*) très élevée. En ce sens son modèle est proche de la réalité. Néanmoins, il ne connaît pas le détail de l'information des joueurs, ou plus exactement il ne connaît pas le jeu en information incomplète qui est précisément joué. Cette hypothèse paraît raisonnable dans beaucoup d'applications économiques. À titre d'exemple, lorsque le nombre d'agents est grand, il n'est pas nécessairement pertinent de penser que le modélisateur est capable de connaître les partitions de chaque agent et donc la structure d'information du jeu en information incomplète effectivement joué.

Ainsi, le prévisionniste sait qu'un certain jeu en information incomplète est joué, que ce jeu est proche du jeu G, il va donc devoir considérer *tous* les jeux en information incomplète « proches » du jeu G pour estimer la qualité de ses prédictions. Une prédiction, ou plus précisément un équilibre de Nash de G, sera dit robuste à l'information incomplète si pour tout jeu en information incomplète U proche de G, cet équilibre est une bonne approximation d'un certain équilibre de Nash (bayesien) de U. Voilà un premier aperçu des motivations de ce test. Beaucoup de notions restent à définir pour mieux comprendre ce qui précède, nous les introduisons par la suite.

Remarque 4.1. *Notons tout de suite que si l'on trouve ce test raisonnable, alors tous les jeux voisins (au sens de la première notion définie dans la section 3) de G doivent être considérés, ce qui inclut en particulier les jeux U^ε, et fournit donc un premier élément de réponse à la question : pourquoi doit-on considérer ces partitions bien particulières ?*

Dans la suite, nous fixons un jeu en information complète $G = [\{A_i\}_{i\in\{1,2\}}, \{g_i\}_{i\in\{1,2\}}]$. Sachant qu'on veut perturber le jeu G, par cohérence nous nous intéresserons à des jeux en information incomplète U satisfaisant : (1) l'ensemble des joueurs $I = \{1, 2\}$ est le même que celui défini dans G, et (2) les ensembles d'actions A_1, A_2 sont les mêmes que dans G. On note $E(G)$ l'ensemble des jeux en information incomplète satisfaisant (1) et (2).

Pour un profil de stratégies σ d'un jeu en information incomplète $U \in E(G)$, nous notons $\sigma_P \in \Delta(A)$ la distribution (*ex ante*) induite par σ (et P), formellement, $\sigma_P(a) = \sum_{\omega\in\Omega} \sigma(a \mid \omega)P(\omega)$. Pour un profil d'actions $a \in A$, $\sigma_P(a)$ est donc la probabilité *ex ante* dans le jeu U que a apparaisse lorsque σ est joué.

Comme précisé plus haut, Kajii et Morris (1997) ont formalisé l'idée de proximité entre un jeu en information incomplète U et le jeu G de la façon suivante. U est proche de G si avec une probabilité (*ex ante*) élevée, la structure des paiements de U est la même que dans G et tout joueur sait ses propres paiements (11). Maintenant, pour chaque jeu en information incomplète $U \in E(G)$, nous définissons Ω_G comme l'ensemble des états du monde où les paiements sont donnés par G, et chaque joueur sait ses propres paiements :

$$\Omega_G \equiv \{\omega \in \Omega \mid u_i(a, \omega') = g_i(a) \text{ pour tout } a \in A, \omega' \in Q_i(\omega) \text{ et } i \in \{1, 2\}\}$$

Définition 4.2. Un profil d'actions $a^* \in A$ sera dit robuste à l'information incomplète dans G si, pour tout $\delta > 0$, il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que, pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, tout jeu en information incomplète $U \in E(G)$ tel que $P(\Omega_G) \geq 1 - \varepsilon$ a un équilibre de Nash bayésien σ tel que $\sigma_P(a^*) \geq 1 - \delta$.

Remarque 4.3. Si $a^* \in A$ est robuste, alors ce doit être un équilibre de Nash. Pour voir cela, il suffit de considérer le jeu $U \in E(G)$ tel que $\Omega_G = \Omega = \{\omega\}$.

Remarque 4.4. $a^* \in A$ n'est pas robuste à l'information incomplète s'il existe $\delta > 0$ et une suite de jeux en information incomplète $\{U^{\varepsilon^l}\}$, où $U^{\varepsilon^l} \in E(G)$ et $P(\Omega_G) \geq 1 - \varepsilon^l$ (où $\varepsilon^l \to 0$ quand $l \to +\infty$) tel que tout équilibre de Nash bayesien σ^l de $U^{\varepsilon l}$ a une distribution d'action induite σ_P^l tel que $\sigma_P^l(a^*) < 1 - \delta$. En ce sens, a^* n'est pas une prédiction robuste.

Le lecteur intéressé par des variations sur ce test se référera à Kajii et Morris (1997) et Kajii et Morris (1997a).

Considérons un jeu G (à deux joueurs) où il existe un équilibre de Nash strictement p–dominant dénoté a^* pour $p < \frac{1}{2}$. En se référant à la remarque précédente, ainsi que par la proposition 3 – 8, nous savons que tout profil d'action $a \neq a^*$ n'est pas robuste à l'information incomplète. Maintenant que peut-on dire de l'équilibre strictement p–dominant (où $p < \frac{1}{2}$) a^* ? À ce stade on ne peut pas exclure la possibilité de construire un jeu en information incomplète (par exemple dans l'esprit de celui construit à la section 2) qui élimine a^*. Kajii et Morris (1997) ont en fait montré que c'était impossible. De façon plus forte, ils ont montré le résultat suivant.

Proposition 4.5. *Si a^* est un équilibre strictement p–dominant pour $p < \frac{1}{2}$ de G, alors a^* est l'unique équilibre robuste à l'information incomplète de G.*

Esquisse de preuve

Comme souligné plus haut, aucun autre profil d'actions que a^* ne peut être robuste à l'information incomplète. Ainsi prouver que a^* est robuste implique

(11) L'hypothèse que tout joueur connaît ses propres paiements est faite pour simplifier l'analyse. Comme remarqué par Kajii et Morris (1997), tous les résultats tiennent si on lève cette hypothèse. De façon plus générale, cette littérature s'intéresse à l'incertitude d'ordre élevé et donc ne souhaite pas s'encombrer d'une incertitude de premier ordre, typiquement l'incertitude d'un joueur sur ses propres paiements.

nécessairement que a^* est l'unique équilibre robuste. Nous ne ferons qu'une esquisse de la preuve de la robustesse de a^*. Cette esquisse de preuve passera sous silence un certain nombre de détails techniques, notre unique objectif étant de donner l'esprit général de cette preuve en montrant en quoi le résultat du chemin critique précédemment présenté est crucial dans celle-ci.

(1) Prenons un jeu U tel que $P(\Omega_G)$ est proche de 1. Construisons un jeu modifié U' où pour chaque joueur i, les paiements dans les états du monde appartenant à $B_i^p(CB^p(\Omega_G))$ sont modifiés de sorte que a_i^* soit une action strictement dominante dans les jeux en information complète associés à ces états du monde. On peut alors montrer qu'en tout équilibre de Nash bayesien, chaque joueur i joue a_i^* dans les états du monde appartenant à $B_i^p(CB^p(\Omega_G))$. Notons la propriété (*), a^* est joué dans $\bigcap_{i\in\{1,2\}} B_i^p(CB^p(\Omega_G)) = CB^p(\Omega_G)$.

(2) Prenons l'un de ces équilibres, appelons-le σ, et montrons que c'est un équilibre du jeu original U. On peut montrer que pour chaque joueur i – ses paiements n'ayant pas été modifiés en dehors de $B_i^p(CB^p(\Omega_G))$ – σ_i est une meilleure réponse à σ_{-i} en tout état du monde en dehors de $B_i^p(CB^p(\Omega_G))$.

(3) Maintenant en un état du monde dans $B_i^p(CB^p(\Omega_G))$; le joueur i croit avec une probabilité au moins p que $CB^p(\Omega_G)$ est vrai. Ainsi à l'équilibre σ – et d'après la propriété (*) mise en évidence plus haut – i croira toujours avec une probabilité au moins p que les autres joueront a_{-i}^*, et par définition de l'équilibre p–dominant avec $p < \frac{1}{2}$, il jouera a_i^*. Prouvant en fait que σ_i est aussi une meilleure réponse à σ_{-i} dans les états du monde appartenant à $B_i^p(CB^p(\Omega_G))$. Nous avons donc montré que σ est aussi un équilibre du jeu original U.

(4) Maintenant il reste à appliquer le résultat du chemin critique ; en effet, la probabilité $P(\Omega_G)$ étant proche de 1, ce résultat nous dit que (rappelons que $p < \frac{1}{2}$) $P(CB^p(\Omega_G))$ est en fait proche de 1 prouvant (par la propriété (*)) que $\sigma_P(a^*)$ est proche de 1 et donc que a^* est robuste à l'information incomplète.

Quelques remarques additionnelles

Dans cet article nous nous sommes attachés à présenter un certain nombre d'articles récents autour de la sélection d'équilibres et de l'incertitude d'ordre élevé. Nous avons en fait présenté les premiers résultats donnant une place prépondérante à la notion de p–dominance. Ce concept reste extrêmement fort : beaucoup de jeux ne possèdent pas de tels équilibres. De plus, si on étend l'analyse aux cadres de jeux avec un nombre arbitraire d'agents (mais fini), la condition devient d'autant plus forte. En effet, cette dernière devient : si un jeu possède un équilibre strictement p–dominant avec $p < \frac{1}{I}$ (où I est le nombre de joueurs), alors l'équilibre est l'unique équilibre robuste à l'information incomplète.

Deux approches ont été suivies pour remédier au problème d'inexistence de l'équilibre p–dominance (pour $p < \frac{1}{I}$). D'abord Tercieux (2004) définit une extension ensembliste de la (strict) p–dominant (voir l'article de R. Baron et P. Solal dans le même numéro pour une définition formelle), des résultats d'existence (et d'unicité) fournissant une première réponse au problème d'existence de la p–dominance. Bien qu'on puisse montrer que ce concept caractérise des dynamiques bien connues comme celles de Matsui et Matsuyama (1995), cet ensemble est néanmoins parfois trop large (voir Durieu, Solal et Tercieux (2004)).

La seconde approche est celle des jeux de potentiel. D'abord défini (sans lien *a priori* avec la notion de p–dominance) par Monderer et Shapley (1996), ce concept a lui aussi des propriétés fortes de robustesse comme montré par Ui (2001). Récemment, Morris et Ui (2005) ont prouvé que l'approche potentielle est en fait strictement plus générale. En effet, Morris et Ui (2005) montrent qu'un équilibre p–dominant (pour $p < \frac{1}{I}$) est un cas particulier d'un maximisateur d'un potentiel (généralisé) (voir aussi Oyama et Tercieux (2005) pour d'autres liens entre ces deux approches).

Pour conclure, la notion de défauts de coordination et d'équilibres multiples est centrale en économie. À titre d'exemple, l'économie de l'innovation met en évidence la complémentarité qu'il peut exister entre les investissements des firmes dans des technologies innovantes : une firme a parfois intérêt à innover si et uniquement si les autres firmes innovent. Une telle situation génère de nombreux équilibres, souvent Pareto-ordonnés. Nous avons vu plus haut que l'équilibre qui domine en terme de paiements ne constitue pas nécessairement un point focal sur lequel les agents se coordonneraient. Bien au contraire, c'est nous l'avons vu, les équilibres peu risqués qui seront sélectionnés (les équilibres p–dominant pour $p < \frac{1}{I}$). L'approche des « global games » met souvent en évidence le rôle d'une intervention publique pour aider les agents à se coordonner sur l'équilibre dominant en paiement. La question associée dans un cadre d'économie industrielle semble être une piste de recherche naturelle encore inexplorée.

RÉFÉRENCES

CARLSSON H., van DAMME E., 1993. « Global Games and Equilibrium Selection ». *Econometrica* 61, 989-1018.

DEKEL E., FUDENBERG D., et LEVINE D., 2003. « Learning to Play Bayesian Games ». *Games Eco. Behav.* 46, 282-203.

DURIEU J., SOLAL P., TERCIEUX O., 2003. « Adaptive learning and curb set selection ». Mimeo, University of Paris 1.

FRANKEL D., MORRIS S., PAUZNER A., 2003. « Equilibrium Selection in Global Games with Strategic Complementarities ». *J. Econ. Theory* 108, 1-44.

HARSANYI J., 1967. « Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. Part I : The Basic Model ». *Management Science* 14, 159-182.

HARSANYI J., SELTEN R., 1988. « A General Theory of Equilibrium in Games », Cambridge MIT Press, Cambridge.

KAJII A., MORRIS S., 1997. « The robustness of equilibria to incomplete information ». *Econometrica* 65, 1283-1309.

KAJII A., MORRIS S., 1997a. « Refinements and higher order beliefs : A unified survey ». Mimeo, University of Pennsylvania.

MATSUI A., MATSUYAMA K., 1995. « An approach to equilibrium selection ». *J. Econ. Theory* 65, 415-434.

MONDERER D., SAMET D., 1989. « Approximating common knowledge with common beliefs ». *Games Econ. Behav.* 1, 170-190.

MONDERER D., SAMET D., 1996. « Proximity of Information in Games with Incomplete Information ». *Math. of Oper. Res.* 3, 707-725.

MONDERER D., SHAPLEY L.S., 1996. « Potential games ». *Games Econ. Behav.* 14, 124-143.

MORRIS S., ROB R., SHIN H.S., 1995. « *p*–Dominance and belief potential ». *Econometrica* 63, 145-157.

MORRIS S., SHIN H.S., 1998. « Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks ». *American Economic Review* 88, 587-597.

MORRIS S., SHIN H.S., 2003. « Global Games : Theory and Applications ». *In* « Advances in Economics and Econometrics, the Eighth World Congress » (édité par M. Dewatripont, L. Hansen et S. Turnovsky). Cambridge University Press.

MORRIS S., UI T., 2005. « Generalized Potentials and Robust Sets of Equilibria ». *J. Econ. Theory*, forthcoming.

OYAMA D., TERCIEUX O., 2004. « Iterated Potential and Robustness of Equilibria ». Disponible à http://www.e.u-tokyo.ac.jp/~oyama/papers/itMP.html.

PEARCE D., 1984. « Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection ». *Econometrica* 52, 1029-1050.

RUBINSTEIN A., 1989. « The Electronic Mail Game : Strategic Behavior under Almost Common Knowledge ». *American Economic Review* 79, 385-391.

TERCIEUX O., 2004. « *p*–Best response set ». *J. Econ. Theory*, forthcoming.

UI T., 2001. « Robust equilibria of potential games ». *Econometrica* 69, 1373-1380.

E-mail : Tercieux@pse.ens.fr.